



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Algebraický tvar komplexního čísla - operace

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Komplexní čísla: $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$

Součet: $a + b = (a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i$

Rozdíl: $a - b = (a_1 + a_2 i) - (b_1 + b_2 i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) i$

Součin: $a \cdot b = (a_1 + a_2 i) \cdot (b_1 + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Podíl:
$$\frac{a}{b} = \frac{(a_1 + a_2 i)}{(b_1 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + a_2 i)}{(b_1 + b_2 i)} \cdot \frac{(b_1 - b_2 i)}{(b_1 - b_2 i)} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (-a_1 b_2 + a_2 b_1) i}{(b_1^2 + b_2^2)} =$$
$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{(b_1^2 + b_2^2)} + \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{(b_1^2 + b_2^2)} i$$

V algebraickém tvaru jsou dána komplexní čísla:

$$a = 4 - 3i \quad b = -2i - 1 \quad c = 5i \quad d = -8 + 6i \quad f = -\sqrt{3}i \quad g = \frac{4i + 3}{5}$$

1. Vypočítejte a vyjádřete v algebraickém tvaru:

a. $a + b - c - d$

b. $2c - 3b + 4a - 5g$

c. $a \cdot b$

d. $\frac{1}{2}d \cdot (-3f)$

e. $\frac{b}{c}$

f. $\frac{d}{a}$

2. Určete $|z|$:

a. $z = a \cdot c - 5\bar{b}$

b. $z = \frac{d}{c} - \frac{a}{b} + 2g$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Výsledky:

1. a. $11 - 16i$
b. 16
c. $-10 - 5i$
d. $9\sqrt{3} - 12\sqrt{3}i$
e. $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$
f. -2
2. a. $|z| = 10\sqrt{5}$
b. $|z| = \sqrt{5}$

Řešení:

1.

a. $a + b - c - d = (4 - 3i) + (-2i - 1) - (5i) - (-8 + 6i) = 4 - 3i - 2i - 1 - 5i + 8 - 6i =$
 $= \mathbf{11 - 16i}$

b. $2c - 3b + 4a - 5g = 2 \cdot 5i - 3 \cdot (-2i - 1) + 4 \cdot (4 - 3i) - 5 \cdot \frac{4i+3}{5} =$
 $= 10i + 6i + 3 + 16 - 12i - 4i - 3 = \mathbf{16}$

c. $a \cdot b = (4 - 3i) \cdot (-2i - 1) = -8i + 6i^2 - 4 + 3i = -8i - 6 - 4 + 3i = \mathbf{-10 - 5i}$

d. $\frac{1}{2}d \cdot (-3f) = \frac{1}{2}(-8 + 6i) \cdot (-3)\sqrt{3}i = (-4 + 3i) \cdot (-3\sqrt{3}i) = -12\sqrt{3}i - 9\sqrt{3}i^2 =$
 $= \mathbf{9\sqrt{3} - 12\sqrt{3}i}$

e. $\frac{b}{c} = \frac{-2i-1}{5i} = \frac{-2i-1}{5i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-2i^2-i}{5i^2} = \frac{2-i}{-5} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

f. $\frac{d}{a} = \frac{-8+6i}{4-3i} = \frac{-8+6i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{-32+24i-24i+18i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{-32-18}{16-9i^2} = -\frac{50}{16+9} = -\frac{50}{25} = \mathbf{-2}$

nebo z paměti, pokud si pozorný řešitel uvědomí, že $-8 + 6i = -2 \cdot (4 - 3i)$

2.

a. $z = a \cdot c - 5\bar{b} = (4 - 3i) \cdot (5i) - 5(2i - 1) = 20i - 15i^2 - 10i + 5 = \mathbf{20 + 10i}$

$$|z| = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = \mathbf{10\sqrt{5}}$$

b. $z = \frac{d}{c} - \frac{a}{b} + 2g = \frac{-8+6i}{5i} - \frac{4-3i}{-2i-1} + 2 \cdot \frac{4i+3}{5} = \frac{-8+6i}{5i} \cdot \frac{i}{i} - \frac{4-3i}{-(1+2i)} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} + \frac{8i+6}{5} =$
 $= \frac{-8i+6i^2}{5i^2} + \frac{4-3i-8i+6i^2}{1^2-(2i)^2} + \frac{8i+6}{5} = \frac{-8i-6}{-5} + \frac{-2-11i}{1+4} + \frac{8i+6}{5} = \frac{8i+6-2-11i+8i+6}{5} =$
 $= \frac{10+5i}{5} = \mathbf{2 + i}$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \mathbf{\sqrt{5}}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková