



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Asymptoty funkce

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Asymptota je přímka, ke které se graf funkce $y = f(x)$ blíží. To znamená, že s rostoucími souřadnicemi se vzdálenost asymptoty a grafu funkce zmenšuje.

Existují dva druhy asymptot:

- Asymptota se směrnici: přímka rovnoběžná nebo různoběžná s osou x
rovnice $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ (nemohou být tedy $\pm\infty$)
platí: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$
- Asymptota bez směrnice: přímka kolmá na osu x v bodě nespojitosti funkce x_0
rovnice $x = x_0$
může existovat pouze, jestliže má funkce bod nespojitosti x_0
a existuje-li alespoň jedna jednostranná nevlastní limita (jde k $\pm\infty$)
 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Určete asymptoty grafu funkce:

1. $y = \frac{2x^2+3}{x-4}$
2. $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$
3. $y = \frac{3x^2}{x^2-1}$
4. $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$
5. $y = x^4 - 2x^2$

Výsledky:

Asymptota se směrnici (ss):

1. $y = 2x + 8$
2. $y = 2x$
3. $y = 3$
4. nemá asymptotu ss
5. nemá asymptotu ss

Asymptota bez směrnice (bs):

- $x = 4$
nemá asymptotu bs
 $x = 1$, $x = -1$
 $x = -1$
nemá asymptotu bs

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Řešení:

Určete asymptoty grafu funkce:

1. $y = \frac{2x^2+3}{x-4}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

zjišťujeme oba druhy asymptot

asymptota ss: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^2+3}{x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1} = 2$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2+3}{x-4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+3-2x^2+8x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x+3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x}{x} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{1} = 8 \quad \text{rovnice:} \quad y = 2x + 8$$

asymptota bs: $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2+3}{x-4} = \left\| \frac{35}{0^+} \right\| = +\infty$ nebo $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2+3}{x-4} = \left\| \frac{35}{0^-} \right\| = -\infty$

rovnice: $x = 4$

Závěr: Funkce $y = \frac{2x^2+3}{x-4}$ má dvě asymptoty, jejichž rovnice jsou

$y = 2x + 8$ a $x = 4$.

2. $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$

$D(f) = \mathbb{R}$

zjišťujeme pouze asymptotu ss

asymptota ss: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1} = 2$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x^2+1} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{x} = -2 \cdot 0 = 0 \quad \text{rovnice:} \quad y = 2x$$

Závěr: Funkce $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$ má jednu asymptotu, jejíž rovnice je $y = 2x$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$$3. \quad y = \frac{3x^2}{x^2-1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ zjišťujeme oba druhy asymptot

asymptota ss:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = 3 \cdot 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2-1} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{1} = 3$$

rovnice: $y = 3$

asymptoty bs:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2}{(x+1)(x-1)} = \left\| \frac{3}{2 \cdot 0^+} \right\| = +\infty$$

$$\text{nebo } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{(x+1)(x-1)} = \left\| \frac{3}{2 \cdot 0^-} \right\| = -\infty$$

rovnice: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2}{(x-1)(x+1)} = \left\| \frac{3}{-2 \cdot 0^+} \right\| = -\infty$$

$$\text{nebo } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2}{(x-1)(x+1)} = \left\| \frac{3}{-2 \cdot 0^-} \right\| = +\infty$$

rovnice: $x = -1$

Závěr:

Funkce $y = \frac{3x^2}{x^2-1}$ má tři asymptoty, jejichž rovnice jsou

$y = 3$, $x = 1$, $x = -1$.

$$4. \quad y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ zjišťujeme oba druhy asymptot

asymptota ss:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^4}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3+2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

funkce nemá asymptotu ss

asymptota bs:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4}{(x+1)(x+1)} = \left\| \frac{1}{0^+ \cdot 0^+} \right\| = +\infty$$

$$\text{nebo } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4}{(x+1)(x+1)} = \left\| \frac{1}{0^- \cdot 0^-} \right\| = +\infty$$

rovnice: $x = -1$

Závěr:

Funkce $y = \frac{x^4}{(x+1)^2}$ má jednu asymptotu, jejíž rovnice je $x = -1$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

5. $y = x^4 - 2x^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

zjišťujeme pouze asymptotu ss

asymptota ss:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

funkce nemá asymptotu ss

Závěr:

Funkce $y = x^4 - 2x^2$ nemá asymptotu.