



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Derivace složené funkce

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Složená funkce: $y = f(g(x))$ kde $y = f(u)$ je funkce vnější a $u = g(x)$ je funkce vnitřní

Pravidlo pro derivování složené funkce: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Vypočítejte derivace funkcí:

1. $y = (2x^3 + x - 4)^5$

2. $y = \sqrt{\ln x}$

3. $y = \ln \cos x$

4. $y = \sin^3 x$

5. $y = \sin x^3$

6. $y = \sin 3x$

7. $y = e^{(2x^5+3)}$

8. $y = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

9. $y = \frac{6}{\operatorname{tg}^2 x}$

10. $y = \sqrt{x \cdot 2^x}$

Výsledky:

1. $y' = 5(2x^3 + x - 4)^4 \cdot (6x^2 + 1)$

2. $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

3. $y' = -\operatorname{tg} x$

4. $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$

5. $y' = 3x^2 \cos x^3$

6. $y' = 3 \cos 3x$

7. $y' = 10x^4 e^{(2x^5+3)}$

8. $y' = -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$

9. $y' = -\frac{12}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^2 x}$

10. $y' = \frac{2^x(1+x \ln 2)}{2\sqrt{x \cdot 2^x}}$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Řešení:

$$1. \left((2x^3 + x - 4)^5 \right)' = 5(2x^3 + x - 4)^4 \cdot (6x^2 + 1)$$

vnější funkce

$$y = u^5$$

$$y' = 5u^4 \rightarrow y' = 5(2x^3 + x - 4)^4$$

vnitřní funkce

$$u = 2x^3 + x - 4$$

$$u' = 6x^2 + 1$$

$$2. (\sqrt{\ln x})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

vnější funkce

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

vnitřní funkce

$$u = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$3. (\ln \cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

vnější funkce

$$y = \ln u$$

$$y' = \frac{1}{u} \rightarrow y' = \frac{1}{\cos x}$$

vnitřní funkce

$$u = \cos x$$

$$u' = -\sin x$$

$$4. (\sin^3 x)' = ((\sin x)^3)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

vnější funkce

$$y = u^3$$

$$y' = 3u^2 \rightarrow y' = 3\sin^2 x$$

vnitřní funkce

$$u = \sin x$$

$$u' = \cos x$$

$$5. (\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

vnější funkce

$$y = \sin u$$

$$y' = \cos u \rightarrow y' = \cos x^3$$

vnitřní funkce

$$u = x^3$$

$$u' = 3x^2$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$$6. (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3 = \mathbf{3 \cos 3x}$$

vnější funkce

$$y = \sin u$$

$$y' = \cos u \rightarrow y' = \mathbf{\cos 3x}$$

vnitřní funkce

$$u = 3x$$

$$u' = \mathbf{3}$$

$$7. (e^{(2x^5+3)})' = e^{(2x^5+3)} \cdot 10x^4 = \mathbf{10x^4 e^{(2x^5+3)}}$$

vnější funkce

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \rightarrow y' = \mathbf{e^{(2x^5+3)}}$$

vnitřní funkce

$$u = 2x^5 + 3$$

$$u' = \mathbf{10x^4}$$

$$8. \left(\frac{1}{(x^2+1)^3} \right)' = ((x^2+1)^{-3})' = -\frac{3}{(x^2+1)^4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

vnější funkce

$$y = u^{-3}$$

$$y' = -3u^{-4} \rightarrow y' = -\frac{3}{u^4} \rightarrow y' = -\frac{3}{(x^2+1)^4}$$

vnitřní funkce

$$u = x^2 + 1$$

$$u' = \mathbf{2x}$$

$$9. \left(\frac{6}{\operatorname{tg}^2 x} \right)' = (6(\operatorname{tg} x)^{-2})' = -\frac{12}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{12}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^2 x}$$

vnější funkce

$$y = 6u^{-2}$$

$$y' = -12u^{-3} \rightarrow y' = -\frac{12}{u^3} \rightarrow y' = -\frac{12}{\operatorname{tg}^3 x}$$

vnitřní funkce

$$u = \operatorname{tg} x$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$10. (\sqrt{x \cdot 2^x})' = \left((x \cdot 2^x)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot 2^x}} \cdot 2^x(1 + x \ln 2) = \frac{2^x(1+x \ln 2)}{2 \cdot \sqrt{x \cdot 2^x}}$$

vnější funkce

$$y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot 2^x}}$$

vnitřní funkce

$$u = x \cdot 2^x$$

$$u' = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$u' = \mathbf{2^x(1 + x \ln 2)}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková