



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Determinant

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Determinant čtvercové matice $A_n \Rightarrow \det A$ nebo $|A|$ vypočítáme:

Jestliže je řád matice

- $n = 1$ $\det A = |a_{11}| = a_{11}$
- $n = 2$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ křížové pravidlo
- $n = 3$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$ Sarrusovo
 $- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ pravidlo

1. Vypočítejte determinant:

a. $\det A = |-10|$ $\det B = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$

b. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\det B = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ $\det C = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$

2. Vypočítejte determinant:

a. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

b. $\det B = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

c. $\det C = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ -a & a & b \\ -a & -a & b \end{vmatrix}$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

3. Řešte rovnice:

a. $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ 1 - x & -1 \end{vmatrix} = 1$

b. $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$

Výsledky:

1. a. $\det A = -10$ $\det B = -1$ $\det C = 9$

b. $\det A = 1$ $\det B = 4ab$ $\det C = 1$

2. a. $\det A = -25$

b. $\det B = 100$

c. $\det C = 2a^2(1 + b)$

3. a. $x = \{1; 4\}$

b. $x = \{-1; 3\}$

Řešení:

1. a. $\det A = |-10| = -10$

$$\det B = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = -6 + 5 = -1$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) - (-\sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{5} = -2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 9$$

b. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab \end{aligned}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha - (-\sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{a. } \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - \\ &\quad -4 \cdot (-5) \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot 0 = \\ &\quad = -50 + 0 - 1 + 20 + 6 + 0 = \mathbf{-25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \det \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - \\ &\quad -(-1) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot 8 = \\ &\quad = 27 + 16 - 12 + 9 + 12 + 48 = \mathbf{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \det \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ -a & a & b \\ -a & -a & b \end{vmatrix} = a^2b + a^2 - a^2b - (-a^2) - (-a^2b) - (-a^2b) = \\ &\quad = 2a^2 + 2a^2b = \mathbf{2a^2(1 + b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \text{a. } \begin{vmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ 1 - x & -1 \end{vmatrix} &= 1 \Rightarrow (x^2 - 2) \cdot (-1) - 5 \cdot (1 - x) = 1 \\ &\quad -x^2 + 2 - 5 + 5x = 1 \\ &\quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad D = 9 \\ &\quad \mathbf{x_1 = 4} \quad \mathbf{x_2 = 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \Rightarrow 1 + x + x^2 - x - x - x = 4 \\ &\quad x^2 - 2x + 1 = 4 \\ &\quad (x - 1)^2 = 4 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 3} \\ &\quad \Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow \mathbf{x_2 = -1} \end{aligned}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková