



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Goniometrický tvar komplexního čísla - vlastnosti

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

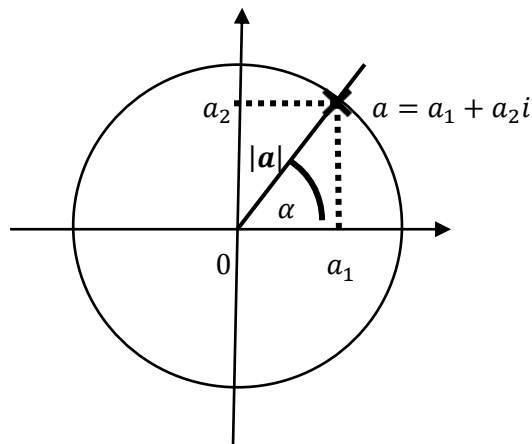
Komplexní číslo:

Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2 i$

Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \quad \sin \alpha = \frac{a_2}{|a|}$$



1. Zapište daná komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

(při zápisu úhlu upřednostněte obloukovou míru)

a. $a = 1$

b. $b = -1$

c. $c = i$

d. $d = -i$

e. $e = -8$

f. $f = 5i$

g. $g = 1 + i$

h. $h = -1 + i\sqrt{3}$

j. $j = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

k. $k = 3 - 4i$

2. Zapište daná komplexní čísla v algebraickém tvaru:

a. $a = 12(\cos \pi + i \sin \pi)$

b. $b = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

c. $c = \sqrt{5}(\cos 0 + i \sin 0)$

d. $d = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$

e. $e = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

f. $f = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

g. $g = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

h. $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

j. $j = 13(\cos 22^\circ 37' + i \sin 22^\circ 37')$

k. $k = 7(\cos 224^\circ 25' + i \sin 224^\circ 25')$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Výsledky:

1.

a. $a = \cos 0 + i \sin 0$

b. $b = \cos \pi + i \sin \pi$

c. $c = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

d. $d = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

e. $e = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$

f. $f = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

g. $g = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

h. $h = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

j. $j = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

k. $k = 5(\cos 306^\circ 52' + i \sin 306^\circ 52')$

2.

a. $a = -12$

b. $b = i\sqrt{3}$

c. $c = \sqrt{5}$

d. $d = -6i$

e. $e = -1 - i$

f. $f = -2 + 2i\sqrt{3}$

g. $g = 3 + i\sqrt{3}$

h. $h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

j. $j = 12 + 5i$

k. $k = -5 - 4,9i$

Řešení:

1.

a. $a = 1$ $|a| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ $\alpha = 0$ osa x^+
 $a = \cos 0 + i \sin 0$

b. $b = -1$ $|b| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ $\alpha = \pi$ osa x^-
 $b = \cos \pi + i \sin \pi$

c. $c = i$ $|c| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ osa y^+
 $c = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

d. $d = -i$ $|d| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$ $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ osa y^-
 $d = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

e. $e = -8$ $|e| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$ $\alpha = \pi$ osa x^-
 $e = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$

f. $f = 5i$ $|f| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ osa y^+
 $f = 5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

g. $g = 1 + i$ $|g| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ I. kvadrant
 $g = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

h. $h = -1 + i\sqrt{3}$ $|h| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ II. kvadrant
 $h = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ $\cos \alpha' = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{3} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$

j. $j = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $|j| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$ III. kvadrant
 $j = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$ $\cos \alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$$\begin{aligned} \text{k. } k &= 3 - 4i & |k| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 & \text{IV. kvadrant} \\ k &= 5(\cos 306^\circ 52' + i \sin 306^\circ 52') & \cos \alpha' &= \frac{3}{5} \rightarrow \alpha' = 53^\circ 08' \\ & & & \rightarrow \alpha = 306^\circ 52' \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a. } a &= 12(\cos \pi + i \sin \pi) & a &= 12(-1 + 0i) = -12 \\ a &= -12 \\ \text{b. } b &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) & b &= \sqrt{3}(0 + i) = i\sqrt{3} \\ b &= i\sqrt{3} \\ \text{c. } c &= \sqrt{5}(\cos 0 + i \sin 0) & c &= \sqrt{5}(1 + 0i) = \sqrt{5} \\ c &= \sqrt{5} \\ \text{d. } d &= 6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) & d &= 6(0 - i) = -6i \\ d &= -6i \\ \text{e. } e &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) & \text{III. kvadrant} & e = \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ e &= -1 - i & & e = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -1 - i \\ \text{f. } f &= 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) & \text{II. kvadrant} & f = 4 \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ f &= -2 + 2i\sqrt{3} & & f = 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -2 + 2i\sqrt{3} \\ \text{g. } g &= 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) & \text{I. kvadrant} & g = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 3 + i\sqrt{3} \\ g &= 3 + i\sqrt{3} \\ \text{h. } h &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) & \text{IV. kvadrant} & h = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ h &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & & h = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \text{j. } j &= 13(\cos 22^\circ 37' + i \sin 22^\circ 37') & \text{I. kvadrant} & j = 13(0,923 + 0,385i) \\ j &= 12 + 5i & & j = 12 + 5i \\ \text{k. } k &= 7(\cos 224^\circ 25' + i \sin 224^\circ 25') & \text{III. kvadrant} & k = 7(-0,714 - 0,7i) \\ k &= -5 - 4,9i & & k = -5 - 4,9i \end{aligned}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková