



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Hodnost matice

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Zadání:

Zopakujme si:

## Hodnost matice A

Hodností matice A rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice (značíme  $h(A)$ ).

## Úpravy zachovávající hodnost matice (ekvivalentní úpravy)

- záměna pořadí řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku
- vynechání nulového řádku
- vynechání řádku, který je násobkem jiného řádku

## Určení hodnosti matice A

- převodem na schodovitý (stupňový) tvar – Gaussův tvar
  - $h(A)$  je rovna počtu **nenulových** řádků
- převodem na matici s jednotkovými vektory – Gauss-Jordanův tvar
  - $h(A)$  je rovna počtu **různých** jednotkových vektorů

Volíme vždy vhodnější způsob výpočtu.

Určete hodnost matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

$$h(A) = 4$$

$$h(B) = 2$$

$$h(C) = 3$$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Řešení:

Matici A zapíšeme do schématu (ukázka obou způsobů řešení):

## 1. Řešení převodem na schodovitý tvar

Matice A	Poznámky
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	<b>zvolíme klíčový řádek</b> , který se nemění a píšeme ho jako první
$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	ve sloupci pod prvním prvkem řádku $\boxed{2}$ potřebujeme samé 0 řádek opíšeme (vyhovuje požadavku) řádek vynásobíme (-1) a přičteme k prvnímu řádku (klíčovému) řádek vynásobíme (-2) a přičteme k trojnásobku prvního řádku
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	řádek opíšeme a <b>pod ním zvolíme klíčový řádek</b> , který opíšeme ve sloupci pod druhým prvkem řádku $\boxed{1}$ potřebujeme samé 0 řádek přičteme k druhému (klíčovému) řádku řádek přičteme k 7 násobku druhého (klíčového) řádku
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & 16 \end{pmatrix}$	řádek opíšeme řádek opíšeme zaměníme pořadí třetího a čtvrtého řádku
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -23 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	matici jsme převedli na <b>schodovitý tvar</b> , který má čtyři nenulové řádky <b>hodnost matice <math>h(A) = 4</math></b>

Závěr: Hodnost matice  $h(A) = 4$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

## 2. Řešení převodem na matici s jednotkovými vektory

Matice A	Poznámky
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	<p><b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <b>1</b>, který se nemění a opíšeme jej</p> <p><b>ve sloupci</b> s prvkem <b>1</b>, <b>vytvoříme jednotkový vektor</b>, který se už nebude měnit, takže jej už pouze opisujeme</p>
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	<p>ve sloupci s prvkem <b>1</b> potřebujeme vždy ostatní prvky samé 0</p> <p>řádek opíšeme (vyhovuje požadavku)</p> <p>řádek přičteme k 3 násobku prvního řádku (klíčového)</p> <p>řádek přičteme k 3 násobku prvního řádku (klíčového)</p>
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -7 & 0 & 1 \\ 11 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	<p>řádek přičteme ke klíčovému řádku</p> <p>řádek opíšeme (vyhovuje požadavku)</p> <p><b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b>, řádek jsme vynásobili (-1)</p> <p>řádek přičteme k 3 násobku klíčového řádku</p>
$\begin{pmatrix} -6 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -7 & 0 & 1 \\ -16 & -15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>řádek přičteme k 5 násobku klíčového řádku</p> <p><b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b>, řádek jsme vynásobili (-1)</p> <p>řádek přičteme k 7 násobku klíčového řádku</p> <p>řádek přičteme k 15 násobku klíčového řádku</p>
$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>řádek přičteme k 16 násobku klíčového řádku</p> <p>řádek přičteme ke 2 násobku klíčového řádku</p> <p>řádek přičteme k 23 násobku klíčového řádku</p> <p><b>zvolíme poslední klíčový řádek s prvkem 1</b>, řádek jsme vydělili (-46)</p>
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>úpravou matice vznikly <b>čtyři různé</b> jednotkové sloupcové vektory</p> <p><b>hodnost matice <math>h(A) = 4</math></b></p>

Závěr: Hodnost matice  $h(A) = 4$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Matici B zapíšeme do schématu

(způsob řešení převodem na schodovitý tvar se zdá výhodnější):

Řešení převodem na schodovitý tvar

Matice <b>B</b>	Poznámky
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	zvolíme <b>klíčový řádek</b> , který se nemění a píšeme ho jako první
$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	ve sloupci pod prvním prvkem řádku $\boxed{1}$ potřebujeme samé 0 řádek přičteme k (-2) násobku prvního (klíčového) řádku řádek přičteme k (-3) násobku prvního (klíčového) řádku řádek přičteme k (-4) násobku prvního (klíčového) řádku
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{pmatrix}$	řádek je 2 násobkem druhého řádku – <b>vypustíme jej</b> řádek je 3 násobkem druhého řádku – <b>vypustíme jej</b>
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	matici jsme převedli na <b>schodovitý tvar</b> , který má dva nenulové řádky <b>hodnost matice <math>h(B) = 2</math></b>

Závěr: Hodnost matice  $h(B) = 2$

Matici C zapíšeme do schématu:

(způsob řešení převodem na matici s jednotkovými vektory se zdá výhodnější)

Řešení převodem na matici s jednotkovými vektory

Matrice C	Poznámky
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	<p>řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku</p> <p>řádek přičteme k (-2) násobku klíčového řádku</p> <p>řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku</p> <p><b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <math>\mathbf{1}</math>, který se nemění a opíšeme jej</p>
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	<p>řádek opíšeme (vyhovuje požadavku)</p> <p><b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <math>\mathbf{1}</math>, který se nemění a opíšeme jej</p> <p>řádek přičteme ke klíčovému řádku</p> <p>řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku</p>
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$	<p>řádek je (-3) násobkem třetího řádku – <b>vypustíme jej</b></p> <p>řádek přičteme k 3 násobku klíčového řádku</p> <p><b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <math>\mathbf{1}</math>, který se nemění a opíšeme jej</p> <p>řádek přičteme k (-10) násobku klíčového řádku</p>
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>úpravou matice vznikly <b>tři různé</b> jednotkové sloupcové vektory (další různý jednotkový vektor vytvořit nelze)</p> <p><b>hodnost matice <math>h(C) = 3</math></b></p>

Závěr: Hodnost matice  $h(C) = 3$