



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Homogenní soustava rovnic

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Zadání:

Zopakujme si:

$A$  matice soustavy,  $A_r$  matice soustavy rozšířená,  $n$  počet neznámých  $x_i$

**Homogenní soustava rovnic je vždy řešitelná**

Vždy platí  $h(A) = h(A_r)$

**Počet řešení homogenní soustavy rovnic**

- $h(A) = n$  soustava má jedno triviální řešení  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
- $h(A) < n$  soustava má nekonečně mnoho řešení počet parametrů je  $n - h(A)$

**Metody řešení soustavy rovnic**

- Neúplná eliminační metoda (Gaussova)
- Úplná eliminační metoda (Jordanova)

**Řešením soustavy**

je uspořádaná  $n$ -tice  $[x_1; x_2; \dots \dots x_n]$

**Řešte soustavu rovnic v  $\mathbb{R}$ :**

1.  $2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

2.  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

$$5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$-3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

3.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$$

Výsledky:

1.  $[0; 0; 0; 0]$

2.  $[2t - 2k; t; k; 3t - 3k]$

3.  $[t; t; -t; -t; t]$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

# Řešení:

1. Soustavu rovnic zapíšeme do schématu (ukázka obou způsobů řešení):

a. Neúplná eliminační metoda

$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$	b	poznámky
$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	<p><b>zvolíme klíčový řádek</b>, který se nemění a píšeme ho jako první</p>
$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	<p>ve sloupci pod prvním prvkem řádku <math>\boxed{1}</math> potřebujeme samé 0  řádek přičteme k (-2) násobku prvního (klíčového) řádku  řádek přičteme k (-1) násobku prvního (klíčového) řádku  řádek přičteme k prvnímu (klíčovému) řádku</p>
$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	<p>řádek opíšeme a <b>pod ním zvolíme klíčový řádek</b>, který opíšeme  ve sloupci pod druhým prvkem řádku <math>\boxed{-1}</math> potřebujeme samé 0  řádek přičteme k (-2) násobku druhého (klíčového) řádku  řádek dělíme 3 a přičteme k druhému (klíčovému) řádku</p>
$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	<p>řádek opíšeme  řádek opíšeme a <b>pod ním zvolíme klíčový řádek</b>, který opíšeme  ve sloupci pod třetím prvkem řádku <math>\boxed{1}</math> potřebujeme samé 0  řádek přičteme k (-1) násobku třetího (klíčového) řádku</p>
$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$	<p>matici soustavy jsme převedli na schodovitý tvar  <math>h(A) = 4</math> počet neznámých <math>n = 4</math> tedy <math>h(A) = n = 4</math>  soustava má <b>jedno triviální řešení</b>  <math display="block">\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0}</math></p>

Nebo můžeme postupně dosazovat:

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

1	1	1	2	0	$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \rightarrow x_1 + 0 + 0 + 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 = 0$
0	-1	0	-5	0	$-x_2 - 5x_4 = 0 \rightarrow -x_2 - 5 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_2 = 0$ ¶
0	0	1	9	0	$x_3 + 9x_4 = 0 \rightarrow x_3 + 9 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_3 = 0$ ¶
0	0	0	-13	0	$13x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0$ ¶

Závěr: Soustava má řešení  $[0; 0; 0; 0]$

#### b. Úplná eliminační metoda

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b	poznámky
2	1	2	-1	0	
<b>1</b>	-1	2	1	0	<b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <b>1</b> , který se nemění a opišeme jej
-1	2	2	1	0	<b>ve sloupci</b> s prvkem <b>1</b> , <b>vytvoříme jednotkový vektor</b> , který se
1	1	1	2	0	už nebude měnit, takže jej už pouze opisujeme
2	1	2	-1	0	řádek přičteme k (-2) násobku klíčového řádku
<b>1</b>	-1	2	1	0	ve sloupci s prvkem <b>1</b> potřebujeme vždy ostatní prvky samé 0
-1	2	2	1	0	řádek přičteme ke klíčovému řádku
1	1	1	2	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	3	-2	-3	0	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku
1	-1	2	1	0	řádek přičteme ke klíčovému řádku
0	<b>1</b>	4	2	0	<b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b> , řádek opišeme
0	2	-1	1	0	řádek přičteme k (-2) násobku klíčového řádku
0	0	-14	-9	0	řádek přičteme k 9 násobku klíčového řádku
1	0	6	3	0	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku
0	1	4	2	0	řádek přičteme k (-2) násobku klíčového řádku
0	0	3	<b>1</b>	0	<b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b> , řádek jsme vydělili (-3)
0	0	<b>1</b>	0	0	<b>poslední klíčový řádek s prvkem 1</b> jsme nejprve vydělili 13
1	0	-3	0	0	řádek přičteme k 3 násobku klíčového řádku
0	1	-2	0	0	řádek přičteme k 2 násobku klíčového řádku
0	0	3	1	0	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

0	0	1	0	0	$\rightarrow x_3 = 0$
1	0	0	0	0	$\rightarrow x_1 = 0$
0	1	0	0	0	$\rightarrow x_2 = 0$
0	0	0	1	0	$\rightarrow x_4 = 0$

Úpravou matice vznikly **čtyři různé** jednotkové sloupcové vektory.

$h(A) = 4$  počet neznámých  $n = 4$  tedy  $h(A) = n = 4 \rightarrow$  soustava má **jedno triviální** řešení

Závěr: Soustava má řešení  $[0; 0; 0; 0]$

2. Soustavu rovnic zapíšeme do schématu (řešení úplnou eliminační metodou)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b	poznámky
<b>1</b>	1	-1	-1	0	<b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <b>1</b> , který se nemění a opišeme jej
5	-1	1	-3	0	řádek přičteme k (-5) násobku klíčového řádku
3	-3	3	-1	0	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku
0	-3	3	1	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
1	1	-1	-1	0	řádek přičteme ke klíčovému řádku
0	-6	6	2	0	řádek je 2 násobkem čtvrtého řádku – <b>vynecháme jej</b>
0	-6	6	2	0	řádek je 2 násobkem čtvrtého řádku – <b>vynecháme jej</b>
0	-3	3	<b>1</b>	0	<b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b>
1	-2	2	0	0	$\rightarrow x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 2x_2 - 2x_3$
0	-3	3	1	0	$\rightarrow -3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 3x_2 - 3x_3$

Úpravou matice vznikly **dva různé** jednotkové sloupcové vektory.

$h(A) = 2$  počet neznámých  $n = 4$  tedy  $h(A) < n \rightarrow$  soustava má **nekonečně mnoho** řešení  
pro parametrický zápis je počet parametrů  $4 - 2 = 2$

zvolíme vhodně parametry:  $x_2 = t \quad x_3 = s \rightarrow x_1 = 2t - 2s \quad x_4 = 3t - 3s$

Závěr: Soustava má nekonečně mnoho řešení:  $[2t - 2s; t; s; 3t - 3s]$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

3. Soustavu rovnic zapíšeme do schématu (řešení úplnou eliminační metodou)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b	poznámky
<b>1</b>	1	1	1	0	0	<b>zvolíme klíčový řádek</b> s prvkem <b>1</b> a opišeme jej
0	1	1	1	1	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
1	2	3	0	0	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	1	2	3	4	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
0	0	1	2	3	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
1	1	1	1	0	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	<b>1</b>	1	1	1	0	<b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b>
0	1	2	-1	0	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	1	2	3	4	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	0	1	2	3	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
1	0	0	0	-1	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
0	1	1	1	1	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	0	<b>1</b>	-2	-1	0	<b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b>
0	0	1	2	3	0	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	0	1	2	3	0	řádek je shodný se čtvrtým řádkem – <b>vynecháme jej</b>
1	0	0	0	-1	0	řádek opišeme (vyhovuje požadavku)
0	1	0	3	2	0	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku
0	0	1	-2	-1	0	řádek přičteme ke 2 násobku klíčového řádku
0	0	0	<b>1</b>	1	0	<b>zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1</b> řádek jsme vydělili 4
1	0	0	0	-1	0	$\rightarrow x_1 - x_5 = 0 \rightarrow x_1 = x_5$
0	1	0	0	-1	0	$\rightarrow x_2 - x_5 = 0 \rightarrow x_2 = x_5$
0	0	1	0	1	0	$\rightarrow x_3 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 = -x_5$
0	0	0	1	1	0	$\rightarrow x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_4 = -x_5$

Úpravou matice vznikly **čtyři různé** jednotkové sloupcové vektory.

$h(A) = 4$  počet neznámých  $n = 5$  tedy  $h(A) < n \rightarrow$  soustava má **nekonečně mnoho** řešení  
pro parametrický zápis je počet parametrů  $5 - 4 = 1$

zvolíme vhodně parametr:  $x_5 = t \rightarrow x_1 = t \quad x_2 = t \quad x_3 = -t \quad x_4 = -t$

**Závěr:** Soustava má nekonečně mnoho řešení:  $[t; t; -t; -t; t]$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková