



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Integrační metoda „per partes“

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Integrace metodou „per partes“ se používá při integrování:

- součinu funkcí
- funkcí, které nelze integrovat s využitím základních vzorců pro určení primitivních funkcí

Cílem metody je využití derivace funkce tak, aby po částečné integraci došlo ke zjednodušení funkce. Tu pak již můžeme integrovat s využitím základních vzorců pro určení primitivních funkcí.

Integraci provádíme podle schématu:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

Vypočítejte neurčité integrály s využitím metody per partes:

1. $\int x \cdot \cos x \, dx =$

2. $\int (2x - 5) 2^x \, dx =$

3. $\int 3x^2 e^x \, dx =$

4. $\int \ln x \, dx =$

5. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx =$

6. $\int e^x \sin x \, dx =$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Výsledky:

1. $x \sin x + \cos x + c$

2. $\frac{(2x-5) 2^x}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^x}{(\ln 2)^2} + c$

3. $e^x(3x^2 - 6x + 6) + c$

4. $x \cdot \ln x - x + c$

5. $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$

6. $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$

Řešení:

$$1. \int x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$2. \int (2x - 5) 2^x \, dx = \left| \begin{matrix} u = 2x - 5 & u' = 2 \\ v' = 2^x & v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{matrix} \right| = (2x - 5) \frac{2^x}{\ln 2} - \int 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} \, dx = \\ = (2x - 5) \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int 2^x \, dx = (2x - 5) \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{(2x-5) 2^x}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^x}{(\ln 2)^2} + c$$

$$3. \int 3x^2 e^x \, dx = \left| \begin{matrix} u = 3x^2 & u' = 6x \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = 3x^2 \cdot e^x - \int 6x \cdot e^x \, dx = \left| \begin{matrix} u = 6x & u' = 6 \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = \\ = 3x^2 \cdot e^x - (6x \cdot e^x - \int 6e^x \, dx) = 3x^2 \cdot e^x - 6x \cdot e^x + 6e^x + c = e^x(3x^2 - 6x + 6) + c$$

$$4. \int \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$5. \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \, dx = \\ = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + c = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$$

$$\begin{aligned}
 6. \int e^x \sin x \, dx &= \left| \begin{matrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = \\
 &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx
 \end{aligned}$$

úprava vede k rovnici:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$$