



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Integrační metoda substituční

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Integrace metodou substituční se používá při integrování:

- složených funkcí, za novou proměnnou volíme vnitřní složku funkce
- součinu nebo podílu funkcí, za novou proměnnou volíme jednu z funkcí

Cílem je nahrazení funkce nebo její části tak, aby došlo k úpravě na tvar, který lze integrovat s využitím základních vzorců pro určení primitivních funkcí. Po výpočtu primitivní funkce do ní zpětně dosadíme původní hodnotu.

Integraci provádíme podle schématu:

- složená funkce $f[\varphi(x)]$

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{matrix} \right| = \int f(t) dt = F(t) + c = F[\varphi(x)] + c$$

- součin funkcí

$$\int f(x) f'(x) dx = \left| \begin{matrix} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{matrix} \right| = \int t dt = F(t) + c = F(x) + c$$

Vypočítejte neurčité integrály s využitím substituční metody:

1. $\int \cos^5 x \cdot \sin x dx =$

2. $\int \frac{\ln x}{x} dx =$

3. $\int (5x - 3)^6 dx =$

4. $\int \sin 8x dx =$

5. $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx =$

6. $\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx =$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Výsledky:

1. $-\frac{\cos^6 x}{6} + c$

2. $\frac{\ln^2 x}{2} + c$

3. $\frac{(5x-3)^7}{35} + c$

4. $-\frac{1}{8}\cos 8x + c$

5. $\frac{1}{3}e^{x^3} + c$

6. $\frac{4}{3}\sqrt{x^3-1} + c$

Řešení:

$$1. \int \cos^5 x \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = \int t^5 (-dt) = -\frac{t^6}{6} + c = -\frac{\cos^6 x}{6} + c$$

$$2. \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} \, dx \end{array} \right| = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$3. \int (5x - 3)^6 \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x - 3 \\ dt = 5 \, dx \end{array} \right| = \int t^6 \left(\frac{1}{5} dt \right) = \frac{1}{5} \int t^6 \, dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^7}{7} + c = \frac{(5x-3)^7}{35} + c$$

$$4. \int \sin 8x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 8x \\ dt = 8 \, dx \end{array} \right| = \int \sin t \left(\frac{1}{8} dt \right) = \frac{1}{8} \int \sin t \, dt = \frac{1}{8} \cdot (-\cos t) + c = -\frac{1}{8} \cos 8x + c$$

$$5. \int e^{x^3} \cdot x^2 \, dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 \, dx \end{array} \right| = \int e^t \left(\frac{1}{3} dt \right) = \frac{1}{3} \int e^t \, dt = \frac{1}{3} e^t + c = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$$

$$6. \int \frac{2x^2}{\sqrt{x^3-1}} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 - 1 \\ dt = 3x^2 \, dx \end{array} \right| = \int \frac{2}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{3} dt \right) = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{3} \sqrt{x^3-1} + c$$