



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

L'Hospitalovo pravidlo

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Věta (L'Hospitalovo pravidlo): $y = f(x)$ a $y = g(x)$ jsou funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$.

Jestliže existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\|$,

pak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Vypočítejte limity funkcí s využitím L'Hospitalova pravidla:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^4 - x^2 - 1} =$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} =$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} =$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + 5x}{3x - \sin x} =$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x} =$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x \cdot \ln x} =$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} =$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x}{7x^3 + x^2 - 1} =$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4x + \frac{4x^2 - 1}{2 - x} \right) =$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Výsledky:

1. **1**
2. **3**
3. **$\frac{1}{3}$**
4. **4**
5. **$\frac{1}{2}$**

6. **1**
7. **0**
8. **$+\infty$**
9. **0**
10. **-8**

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^4 - x^2 - 1} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x - 5}{8x^3 - 2x} = \frac{3 - 4 - 5}{-8 + 2} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{3x^2 - 12x + 9} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x}{6x - 12} = \frac{18}{6} = 3$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 12} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + 5x}{3x - \sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + 5}{3 - \cos x} = \frac{3 \cos 0 + 5}{3 - \cos 0} = \frac{8}{2} = 4$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{e^0}{\frac{1}{1}} = 1$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x \cdot \ln x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{1} - 1}{\ln 1 + 1 \cdot \frac{1}{1}} = \frac{0}{0 + 1} = 0$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \cdot \ln 2}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 2}{2} = \frac{+\infty \cdot \ln 2 \cdot \ln 2}{2} = +\infty$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x}{7x^3 + x^2 - 1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 5}{21x^2 + 2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{42x + 2} = \frac{6}{+\infty} = 0$
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4x + \frac{4x^2 - 1}{2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 4x^2 + 4x^2 - 1}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 1}{2 - x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{\cong} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{-1} = -8$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková