



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Mocnina komplexního čísla

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Zadání:

Zopakujme si:

Mocniny imaginární jednotky nabývají pouze čtyř různých hodnot:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & \rightarrow & i^{4n+0} = 1 \\ i^1 = i & \rightarrow & i^{4n+1} = i \\ i^2 = -1 & \rightarrow & i^{4n+2} = -1 \\ i^3 = -i & \rightarrow & i^{4n+3} = -i \end{array} \quad n \in N_0$$

Moivreova věta:

$$\text{Pro všechna } n \in N \text{ platí: } (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

1. Určete  $|z|$ :

a.  $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5 + 7i^6$

b.  $z = 2\sqrt{3}i^6 + 2i^{15} + \sqrt{3}i^{16} + 3i^{25}$

2. Určete  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo:

a.  $\frac{5+i}{1+i} = 2i^{25}x - 3i^{18}y - 3i^{12}$

b.  $(4 - i)^4 = 4x - 10yi + 1$

3. Zapište v algebraickém tvaru:

a.  $a^4 \quad a = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$

b.  $b^{30} \quad b = 1 + i$

Výsledky:

1. a.  $|z| = 4\sqrt{2}$

b.  $|z| = 2$

2. a.  $[x; y] = [-1; 2]$

b.  $[x; y] = [40; 24]$

3. a.  $a = -9$

b.  $b = -32\,768i$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

# Řešení:

1.

$$\begin{aligned} \text{a. } z &= 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5 + 7i^6 = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^0 + 6i^1 + 7i^2 = \\ &= 1 + 2i - 3 - 4i + 5 + 6i - 7 = -4 + 4i \quad |z| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } z &= 2\sqrt{3}i^6 + 2i^{15} + \sqrt{3}i^{16} + 3i^{25} = 2\sqrt{3}i^2 + 2i^3 + \sqrt{3}i^0 + 3i = -2\sqrt{3} - 2i + \sqrt{3} + 3i = \\ &= -\sqrt{3} + i \quad |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{5+i}{1+i} &= 2i^{25}x - 3i^{18}y - 3i^{12} & 3 - 2i &= (3y - 3) + 2ix \quad \text{porovnáme} \\ \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} &= 2ix - 3i^2y - 3i^0 & 3 &= 3y - 3 \quad \rightarrow \quad y = 2 \\ \frac{5+i-5i-i^2}{1-i^2} &= 2ix + 3y - 3 & -2 &= 2x \quad \rightarrow \quad x = -1 \\ \frac{6-4i}{2} &= 3y - 3 + 2ix & [x; y] &= [-1; 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (4-i)^4 &= 4x - 10yi + 1 & 161 - 240i &= (4x + 1) - 10yi \\ ((4-i)^2)^2 &= 4x - 10yi + 1 & \text{porovnáme reálnou a imaginární jednotku} \\ (16-8i+i^2)^2 &= (4x+1) - 10yi & 161 &= 4x + 1 \quad \rightarrow \quad x = 40 \\ (15-8i)^2 &= (4x+1) - 10yi & -240 &= -10y \quad \rightarrow \quad y = 24 \\ 225 - 240i + 64i^2 &= (4x+1) - 10yi & [x; y] &= [40; 24] \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{a. } a &= \sqrt{3} \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) & a^4 &= 9(\cos \pi + i \sin \pi) \\ a^4 &= (\sqrt{3})^4 \left( \cos 4 \cdot \frac{3}{4}\pi + i \sin 4 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) & a^4 &= 9(-1 + i \cdot 0) = -9 \\ a^4 &= 9(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) & & \\ \text{b. } b &= 1 + i \quad \text{l. kvadrant} & b^{30} &= (\sqrt{2})^{30} \left( \cos 30 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 30 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \\ |b| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} & b^{30} &= 2^{15} \left( \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right) \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} & b^{30} &= 2^{15}(0 + i \cdot (-1)) \\ b &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) & b^{30} &= -2^{15}i \end{aligned}$$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková