



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nekonečná řada

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zopakujme si:

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n + \dots$ nekonečná řada, kde (\mathbf{a}_n) je nekonečná posloupnost
pokud je posloupnost konvergentní, lze řadu sečíst

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{q} + \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^2 + \dots + \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^{n-1} + \dots$ nekonečná geometrická řada, kde (\mathbf{a}_n)
je nekonečná geometrická posloupnost

Součet nekonečné geometrické řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{a}_1}{1-\mathbf{q}}$ pro $\mathbf{a}_1 \neq 0$, $|\mathbf{q}| < 1$

Zadání:

1. Zjistěte, které z nekonečných řad lze sečíst a vypočítejte jejich součty:

a. $\frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \dots$

b. $3 + 5 + \frac{25}{3} + \frac{125}{9} + \dots$

c. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot (-1)^n$

2. Zjistěte, pro která reálná čísla x lze uvedené řady sečíst, určete jejich součet:

a. $1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots$

b. $\frac{2}{x} - \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^3 - \left(\frac{2}{x}\right)^4 + \dots$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \cdot (-1)^{n-1}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3x}\right)^{n-1}$

3. Řešte rovnici v \mathbb{R} :

a. $-3 + 9x - 27x^2 + 81x^3 - \dots = -\frac{1}{4x}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{n-1} = \frac{4}{x-4}$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

4. Číslo vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem:

a. $0,\overline{21}$

b. $2,\overline{3}$

Výsledky:

1. a. **5** b. nelze sečíst c. $2 - \sqrt{2}$ d. $\frac{3}{5}$ e. nelze sečíst

2. a. $\frac{1}{x}$ pro $x \in (0; 2)$ b. $\frac{2}{x+2}$ pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

c. $\frac{x^2}{1+x^2}$ pro $x \in (-1; 1)$ d. $\frac{3x}{3x+2}$ pro $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

3. a. $x = \frac{1}{9}$ pro $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) - \{0\}$

b. $x = 6$ ($x = 2$ nevyhovuje) pro $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) - \{4\}$

4. a. $\frac{7}{33}$

b. $\frac{7}{3}$

Řešení:

1.

$$\text{a. } a_1 = \frac{5}{2} \quad q = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad s = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$$

$$\text{b. } a_1 = 3 \quad q = \frac{5}{3} > 1 \quad \rightarrow \quad \text{divergentní posloupnost, řadu nelze sečíst}$$

$$\text{c. } a_1 = 1 \quad q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad s = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{d. } a_1 = 1 \quad q = -\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad s = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{e. } a_1 = -8 \quad q = -1 \quad \rightarrow \quad \text{divergentní posloupnost, řadu nelze sečíst}$$

2.

$$\text{a. } a_1 = 1 \quad q = \frac{1-x}{1} = 1-x \quad \rightarrow \quad \text{podmínka pro součet řady: } -1 < 1-x < 1$$

$$s = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} \quad -2 < -x < 0$$

$$2 > x > 0$$

$$x \in (0; 2)$$

$$\text{b. } a_1 = \frac{2}{x} \quad q = -\frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad \text{podmínka pro součet řady: } -1 < -\frac{2}{x} < 1$$

$$s = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2}{x+2} \quad -1 > -\frac{x}{2} > 1$$

$$2 < x < -2$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$$\text{c. } a_1 = x^2 \quad q = \frac{-x^4}{x^2} = -x^2 \rightarrow \text{podmínka pro součet řady: } -1 < -x^2 < 1$$

$$a_2 = -x^4 \quad x \in (-1; 1)$$

$$s = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{d. } a_1 = 1 \quad q = -\frac{2}{3x} \rightarrow \text{podmínka pro součet řady: } -1 < -\frac{2}{3x} < 1$$

$$a_2 = -\frac{2}{3x} \quad -1 > -\frac{3x}{2} > 1$$

$$2 < 3x < -2$$

$$s = \frac{1}{1+\frac{2}{3x}} = \frac{3x}{3x+2} \quad \frac{2}{3} < x < -\frac{2}{3}$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

3.

$$\text{a. } a_1 = -3 \quad q = -3x \rightarrow \text{podmínka pro součet řady: } -1 < -3x < 1$$

$$s = \frac{-3}{1+3x} \quad \frac{1}{3} > x > -\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \text{podmínka pro rovnici: } x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) - \{0\}$$

$$\text{Rovnice: } \frac{-3}{1+3x} = -\frac{1}{4x} \rightarrow 12x = 1 + 3x \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\text{b. } a_1 = 1 \quad q = \frac{3}{x} \rightarrow \text{podmínka pro součet řady: } -1 < \frac{3}{x} < 1$$

$$a_2 = \frac{3}{x} \quad -1 > \frac{x}{3} > 1$$

$$-3 > x > 3$$

$$s = \frac{1}{1-\frac{3}{x}} = \frac{x}{x-3} \rightarrow \text{podmínka pro rovnici: } x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) - \{4\}$$

$$\text{Rovnice: } \frac{x}{x-3} = \frac{4}{x-4} \rightarrow x^2 - 4x = 4x - 12 \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x_1 = 6 \quad (x_2 = 2) \text{ nevyhovuje}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

4.

$$\text{a. } 0,\overline{21} = 0,21 + 0,002\ 1 + 0,000\ 021 + \dots = \frac{21}{100} + \frac{21}{10\ 000} + \frac{21}{1\ 000\ 000} + \dots$$

$$a_1 = \frac{21}{100} \quad q = \frac{1}{100} \quad \rightarrow \quad 0,\overline{21} = \frac{\frac{21}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

$$\text{b. } 2,\overline{3} = 2 + 0,3 + 0,03 + \dots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots$$

$$a_1 = \frac{3}{10} \quad q = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad 2,\overline{3} = 2 + \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + \frac{3}{9} = \frac{7}{3}$$