



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Neurčitý integrál elementárních funkcí

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Zadání:

Zopakujme si:

Základní vzorce pro určení primitivních funkcí:

$$\int 0 dx = c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

Vlastnosti neurčitých integrálů:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Vypočítejte neurčité integrály pomocí vzorců pro určení primitivních funkcí:

1.  $\int (4x^3 - 2x + \sqrt{x} - 3) dx =$

2.  $\int (x - 3) \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx =$

3.  $\int \frac{2x^2 + 3 + x^2 \sqrt{x}}{x^3} dx =$

4.  $\int \left( 3 \cdot 4^x - \frac{3}{2 \cos^2 x} + \frac{5 \sin x}{3} - \frac{e^x}{\sqrt{2}} \right) dx =$

5.  $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx =$

6.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx =$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Výsledky:

1.  $x^4 - x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + c$
2.  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - \ln|x| - \frac{3}{x} + c$
3.  $2\ln|x| - \frac{3}{2x^2} + 2\sqrt{x} + c$
4.  $\frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} - \frac{3}{2}\operatorname{tg} x - \frac{5}{3}\cos x - \frac{e^x}{\sqrt{2}} + c$
5.  $2\sin x + c$
6.  $2x - \operatorname{tg} x + c$

## Řešení:

$$1. \int (4x^3 - 2x + \sqrt{x} - 3) dx = 4 \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3x + c = x^4 - x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + c$$

$$2. \int (x - 3) \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left( x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) dx = \\ = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \ln|x| + 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - \ln|x| - \frac{3}{x} + c$$

$$3. \int \frac{2x^2 + 3 + x^2\sqrt{x}}{x^3} dx = \int \left( \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} + \frac{x^2\sqrt{x}}{x^3} \right) dx = \int \left( \frac{2}{x} + 3x^{-3} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \\ = 2 \ln|x| + 3 \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 \ln|x| - \frac{3}{2x^2} + 2\sqrt{x} + c$$

$$4. \int \left( 3 \cdot 4^x - \frac{3}{2 \cos^2 x} + \frac{5 \sin x}{3} - \frac{e^x}{\sqrt{2}} \right) dx = \int \left( 3 \cdot 4^x - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{5}{3} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} e^x \right) dx = \\ = 3 \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3}{2} \operatorname{tg} x - \frac{5}{3} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} e^x + c = \frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} - \frac{3}{2} \operatorname{tg} x - \frac{5}{3} \cos x - \frac{e^x}{\sqrt{2}} + c$$

$$5. \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2 \cdot \sin x \cos x}{\sin x} dx = \int 2 \cos x dx = 2 \sin x + c$$

$$6. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \\ = \int \left( 1 - \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \int \left( 2 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2x - \operatorname{tg} x + c$$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková