



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Průběh funkce

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Postup při vyšetření průběhu funkce

Zjištěné vlastnosti průběžně zapisujeme do tabulky:

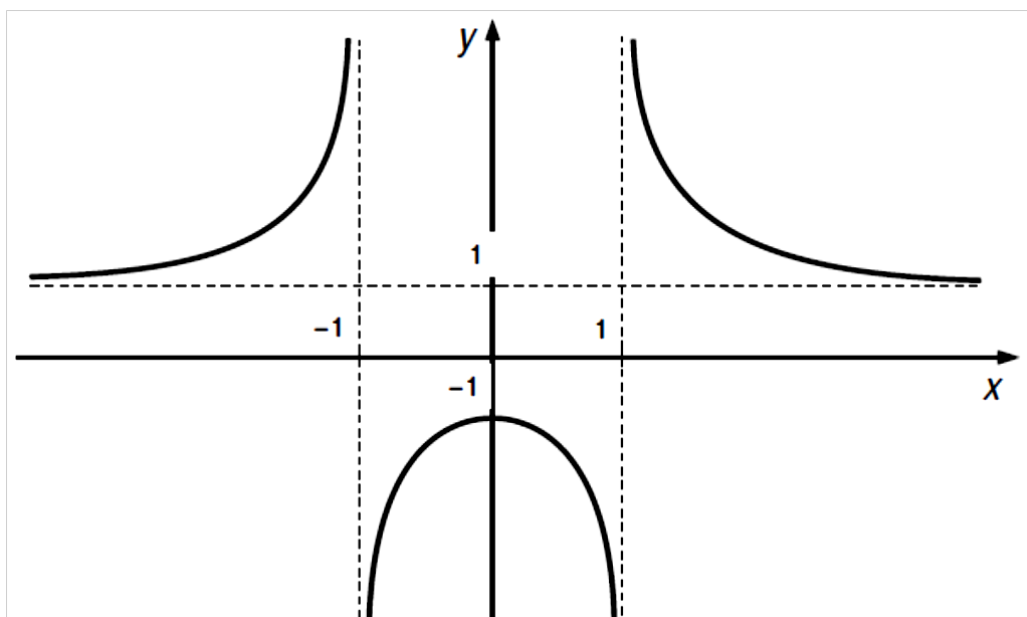
- 1) Definiční obor funkce $D(f)$. Spojitost funkce, určení případných bodů nespojitosti.
- 2) Sudost, lichost nebo periodičnost funkce.
- 3) Průsečíky grafu funkce s osami x a y .
- 4) Znaménko funkce (intervaly, na nichž je funkce kladná nebo záporná).
- 5) Asymptoty grafu funkce a chování funkce v krajních bodech $D(f)$.
- 6) Výpočet první a druhé derivace funkce.
- 7) Stacionární body, intervaly monotonie, lokální extrémy.
- 8) Inflexní body, intervaly konvexity a konkavity.

Sestrojíme graf funkce.

Vyšetřete průběh funkce a sestrojte její graf:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Výsledný graf:



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1. Definiční obor funkce $D(f)$. Spojitost funkce, určení případných bodů nespojitosti:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \rightarrow \text{funkce je nespojitá v bodech } x = \{-1; +1\}$$

2. Sudost, lichost nebo periodičnost funkce:

$$y = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} \rightarrow y = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \text{funkce je } \mathbf{\text{sudá}} \text{ (souměrná podle osy y)}$$

poznámka: stačí tedy zjišťovat vlastnosti pro $x \in \langle 0; +\infty \rangle$

3. Průsečíky grafu funkce s osami x a y :

$$\text{průsečík s osou } x: 0 = \frac{x^2+1}{x^2-1} \rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \text{ (jmenovatel) a } x^2 + 1 > 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R} \\ \rightarrow \mathbf{\text{není průsečík s osou } x}$$

$$\text{průsečík s osou } y: y = \frac{0^2+1}{0^2-1} \rightarrow y = -1 \quad \mathbf{Y[0; -1]}$$

4. Znaménko funkce (intervaly, na nichž je funkce kladná nebo záporná):

znaménko funkce se může změnit nanejvýš v bodě nespojitosti (není průsečík s osou x)

$$\langle 0; 1 \rangle: f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1} = -\frac{5}{3} < 0 \quad \text{funkce je na intervalu } \mathbf{\text{záporná}}$$

$$(1; +\infty): f(2) = \frac{2^2+1}{2^2-1} = \frac{5}{3} > 0 \quad \text{funkce je na intervalu } \mathbf{\text{kladná}}$$

5. Asymptoty grafu funkce a chování funkce v krajních bodech $D(f)$:

$$\text{asymptota se směrnicí: } a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3-x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} - 0 \cdot x = 1 \quad \text{rovnice: } \mathbf{y = 1}$$

$$\text{asymptota bez směrnice: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} = \left\| \frac{3}{2 \cdot 0^+} \right\| = +\infty$$

$$\text{nebo } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} = \left\| \frac{3}{2 \cdot 0^-} \right\| = -\infty$$

$$\text{rovnice: } \mathbf{x = 1}$$

$$\text{krajní body } D(f): \quad \text{tedy } \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \mathbf{1}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

6. Výpočet první a druhé derivace funkce:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)'' = \left(\frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{-4 \cdot (x^2 - 1)^2 - (-4x) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{-4 \cdot (x^2 - 1)(x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4(-3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

7. Stacionární body, intervaly monotonie, lokální extrémy:

stacionární bod: $y' = 0 \rightarrow \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$

lokální extrém: $y''(0) = \frac{12 \cdot 0 + 4}{(0 - 1)^3} = -4 < 0$ lokální **maximum** $[0; -1]$

intervaly monotonie: $\langle 0; 1 \rangle$: ↘ od lokálního maxima funkce **klesá**

$(1; +\infty)$: $y'(2) = \frac{-4 \cdot 2}{(2^2 - 1)^2} = -\frac{8}{3} < 0$ ↘ funkce **klesá**



8. Inflexní body, intervaly konvexity a konkavity:

inflexní bod: $y'' = 0 \rightarrow \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow 12x^2 + 4 > 0$ **není inflexní bod**

intervaly konvexity a konkavity: $\langle 0; 1 \rangle$: $y''(0) = \frac{12 \cdot 0 + 4}{(0 - 1)^3} = -4 < 0$ funkce je **konkávní** ∩

$(1; +\infty)$: $y''(2) = \frac{12 \cdot 2^2 + 4}{(2^2 - 1)^3} = \frac{52}{27} > 0$ funkce je **konvexní** ∪

Tabulka:

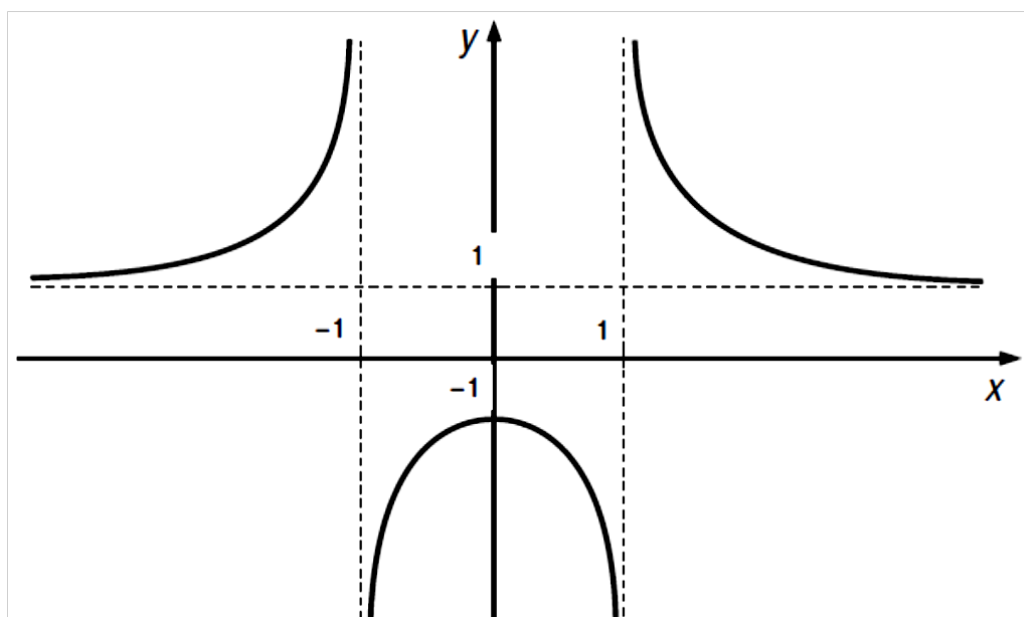
x	0	−	1	+	+∞
y	−1		−∞	+∞	1
y′					
y″	lokální maximum ∩			∪	

Graf je souměrný podle osy y.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Graf funkce¹:



¹ Obrázek zdroj vlastní vytvořen v programu Funkce 2 a upraven.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod