



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rekurentní vzorec posloupnosti

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

Rekurentní vzorec

- vyjadřuje člen zkoumané posloupnosti na základě předcházejících (následujících) členů

a_n člen posloupnosti

a_{n-1} ...člen posloupnosti předcházející člen a_n

a_{n+1} ...člen posloupnosti následující člen a_n

1. Určete první čtyři členy posloupnosti:

a. $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$

b. $a_1 = 2$; $a_{n+1} = n(a_n - 3)$

c. $a_1 = -12$; $a_n = \frac{6-a_{n-1}}{n}$

d. a_1 je kořen rovnice $\frac{x-8}{x-5} - \frac{x+5}{x} = \frac{2x-25}{x^2-5x}$; $a_n = 2a_{n+1} - 3n$

2. Určete součet členů $a_3 + a_4$ posloupnosti:

a. $a_1 = 3$; $a_2 = -5$; $a_{n+1} = -3a_{n-1} - |a_n|$

b. $a_1 = -3$; $a_2 = 6$; $a_{n+2} = -\frac{1}{2}n(2a_n + 3a_{n+1})$

c. $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$

d. $a_1 < a_2$ jsou kořeny rovnice $x^2 - x - 6 = 0$; $a_{n+1} = \frac{6a_{n-1}}{a_n} - n$

3. Určete členy a_1, a_4 posloupnosti:

a. $a_2 = 5$; $a_3 = -1$; $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$

b. $a_2 = 2$; $a_3 = -5$; $a_{n+1} = n \cdot a_{n-1} - a_n$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Výsledky:

1.

- a. $\left\{-\frac{1}{2}; 2; 7; 17\right\}$
- b. $\{2; -1; -8; -33\}$
- c. $\left\{-12; 9; -1; \frac{7}{4}\right\}$
- d. $\{5; 4; 5; 7\}$

2.

- a. $a_3 + a_4 = -13$
- b. $a_3 + a_4 = 0$
- c. $a_3 + a_4 = 6$
- d. $a_3 + a_4 = -12$

3.

- a. $a_1 = 11; a_4 = -7$
- b. $a_1 = -\frac{3}{2}; a_4 = 11$

Řešení:

1.

a. $a_1 = -\frac{1}{2}$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = 2a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = 2a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = 2a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$$

b. $a_1 = 2$; $a_{n+1} = n(a_n - 3)$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = 1 \cdot (a_1 - 3) \Rightarrow a_2 = (2 - 3) = -1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = 2 \cdot (a_2 - 3) \Rightarrow a_3 = 2 \cdot (-1 - 3) = -8$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = 3 \cdot (a_3 - 3) \Rightarrow a_4 = 3 \cdot (-8 - 3) = -33$$

c. $a_1 = -12$; $a_n = \frac{6-a_{n-1}}{n}$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{6-a_1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{6-(-12)}{2} = 9$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{6-a_2}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{6-9}{3} = -1$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{6-a_3}{4} \Rightarrow a_4 = \frac{6-(-1)}{4} = \frac{7}{4}$$

d. a_1 je kořen rovnice $\frac{x-8}{x-5} - \frac{x+5}{x} = \frac{2x-25}{x^2-5x}$; $a_n = 2a_{n+1} - 3n$

vyřešíme rovnici \Rightarrow určíme a_1

$$a_1 \Rightarrow \frac{x-8}{x-5} - \frac{x+5}{x} = \frac{2x-25}{x^2-5x} \Rightarrow (x-8) \cdot x - (x+5) \cdot (x-5) = 2x-25$$
$$x^2 - 8x - x^2 + 25 = 2x - 25 \Rightarrow -10x = -50 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow a_1 = 5$$

upravíme vzorec

$$a_n = 2a_{n+1} - 3n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n + 3n}{2}$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + 3 \cdot 1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2 + 3 \cdot 2}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3 + 3 \cdot 3}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{5 + 9}{2} = 7$$

2.

a. $a_1 = 3$; $a_2 = -5$; $a_{n+1} = -3a_{n-1} - |a_n|$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = -3a_{2-1} - |a_2| \Rightarrow a_3 = -3 \cdot 3 - |-5| = -14$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = -3a_{3-1} - |a_3| \Rightarrow a_4 = -3 \cdot (-5) - |-14| = 1$$

$$a_3 + a_4 = -14 + 1 = -13$$

b. $a_1 = -3$; $a_2 = 6$; $a_{n+2} = -\frac{1}{2}n(2a_n + 3a_{n+1})$

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2} \cdot 1(2a_1 + 3a_2) \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2}(2 \cdot (-3) + 3 \cdot 6) = -6$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{2} \cdot 2(2a_2 + 3a_3) \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{2} \cdot 2(2 \cdot 6 + 3 \cdot (-6)) = 6$$

$$a_3 + a_4 = -6 + 6 = 0$$

c. $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$

upravíme vzorec $\Rightarrow a_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$a_3 + a_4 = 2 + 4 = 6$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

d. $a_1 < a_2$ jsou kořeny rovnice $x^2 - x - 6 = 0$; $a_{n+1} = \frac{6a_{n-1}}{a_n} - n$

vyřešíme rovnici \Rightarrow určíme a_1, a_2

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow D = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{1+5}{2} = 3; x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \Rightarrow a_1 = -2; a_2 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{6a_1}{a_2} - 2 \Rightarrow a_3 = \frac{6 \cdot (-2)}{3} - 2 = -6$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = \frac{6a_2}{a_3} - 3 \Rightarrow a_4 = \frac{6 \cdot 3}{-6} - 3 = -6$$

$$a_3 + a_4 = -6 - 6 = -12$$

3.

a. $a_2 = 5$; $a_3 = -1$; $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 - a_2 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot (-1) - 5 = -7$$

upravíme vzorec $\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} = 2a_n - a_{n+1}$

$$n = 2 \Rightarrow a_1 = 2a_2 - a_3 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 5 - (-1) = 11$$

b. $a_2 = 2$; $a_3 = -5$; $a_{n+1} = n \cdot a_{n-1} - a_n$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 3a_2 - a_3 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2 - (-5) = 11$$

upravíme vzorec $\Rightarrow a_{n+1} = n \cdot a_{n-1} - a_n \Rightarrow a_{n-1} = \frac{a_{n+1} + a_n}{n}$

$$n = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{a_3 + a_2}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2}$$