



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Určitý integrál

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Zadání:

Zopakujme si:

- Určitý integrál je číslo:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [F(b)] - [F(a)]$$

$a$  dolní mez

$b$  horní mez

- Využívá se při výpočtu obsahu rovinného obrazce, objemu rotačního tělesa, ....
- K výpočtu určitého integrálu využíváme vlastnosti pro výpočet integrálu neurčitého:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \qquad \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

- K výpočtu určitého integrálu využíváme metody pro výpočet integrálu neurčitého:

$$\int_a^{\beta} f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

**Vypočítejte určité integrály:**

1.  $\int_1^2 \left( 3x^2 - \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} \right) dx =$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx =$

3.  $\int_0^1 11x (2x^2 - 1)^{10} dx =$

4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 3) \sin x dx =$

5.  $\int_1^e x \cdot \ln x dx =$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

### Výsledky:

1.  $5 - 2 \ln 2 + 4\sqrt{2}$

2.  $\ln 2$

3.  $\frac{1}{2}$

4.  $5$

5.  $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

## Řešení:

$$1. \int_1^2 \left( 3x^2 - \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} \right) dx = \left[ 3 \frac{x^3}{3} - 2 \ln |x| + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = [x^3 - 2 \ln |x| + 2x\sqrt{x}]_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2 \ln 2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}) - (1^3 - 2 \ln 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}) = 5 - 2 \ln 2 + 4\sqrt{2}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \sin x \\ dt = \cos x dx \\ 0 \rightsquigarrow 1 \quad \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$3. \int_0^1 11x(2x^2 - 1)^{10} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x^2 - 1 \\ dt = 4x dx \\ 0 \rightsquigarrow -1 \quad 1 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_{-1}^1 11 t^{10} \left( \frac{1}{4} dt \right) = \frac{11}{4} \int_{-1}^1 t^{10} dt = \frac{11}{4} \left[ \frac{t^{11}}{11} \right]_{-1}^1 =$$
$$= \left[ \frac{t^{11}}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1^{11}}{4} - \frac{(-1)^{11}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 3) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 3 \quad u' = 2 \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = [-(2x + 3) \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2) \cos x dx =$$
$$= [-(2x + 3) \cos x + 2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left( -\left( 2 \frac{\pi}{2} + 3 \right) \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right) - (-(2 \cdot 0 + 3) \cos 0 + 2 \sin 0) =$$
$$= (-\pi - 3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 5$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \int_1^e x \cdot \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x \, dx = \\
&= \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \left( \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left( \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right) = \frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{e^2}{4} - 0 + \frac{1}{4} = \\
&= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod