



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Vlastnosti posloupnosti

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Zadání:

Zopakujme si:

Monotónnost:

Pro posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  reálných čísel,  $n \in \mathbb{N}$  platí:

jestliže  $a_n < a_{n+1}$ , pak je daná posloupnost rostoucí

jestliže  $a_n > a_{n+1}$ , pak je daná posloupnost klesající

jestliže  $a_n \leq a_{n+1}$ , pak je daná posloupnost neklesající

jestliže  $a_n \geq a_{n+1}$ , pak je daná posloupnost nerostoucí

jestliže  $a_n = a_{n+1}$ , pak je daná posloupnost konstantní

Omezenost:

Pro posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  reálných čísel,  $n \in \mathbb{N}$  platí:

jestliže existuje  $m \in \mathbb{R}$ , že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:  $a_n \geq m$ , pak je daná posloupnost zdola omezená

Jestliže existuje  $M \in \mathbb{R}$ , že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí:  $a_n \leq M$ , pak je daná posloupnost shora omezená

Jestliže je posloupnost omezená shora i zdola, pak je daná posloupnost omezená

1. Určete monotónnost a omezenost posloupnosti.

Nejprve určete první čtyři členy dané posloupnosti.

a.  $a_1 = -2$  ;  $a_{n+1} = n \cdot a_n$

b.  $a_1 = 3$  ;  $a_{n+1} = 2n + a_n$

c.  $a_1 = -1$  ;  $a_2 = 1$  ;  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$

d.  $a_1 = 1$  ;  $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n$

2. Určete monotónnost posloupnosti.

Své tvrzení dokažte.

a.  $(3n - 1)_{n=1}^{\infty}$

b.  $\left(\frac{n+2}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

c.  $(5^n)_{n=1}^{\infty}$

d.  $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

3. Určete, pro které reálné hodnoty  $x$  je posloupnost:

a.  $(4 - nx)_{n=1}^{\infty}$  klesající

b.  $\left(\frac{2nx}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$  rostoucí

### Výsledky:

1.

a.  $\{-2; -2; -4; -12; \dots\}$  posloupnost je nerostoucí, shora omezená,  $M = -2$

b.  $\{3; 5; 9; 15; \dots\}$  posloupnost je rostoucí, zdola omezená,  $m = 3$

c.  $\{-1; 1; 1; 4; \dots\}$  posloupnost je neklesající, zdola omezená,  $m = -1$

d.  $\{1; -1; -1; 1; \dots\}$  posloupnost je nemonotónní, omezená,  $M = -1$ ;  $m = 1$

2.

a. posloupnost je rostoucí

b. posloupnost je klesající

c. posloupnost je rostoucí

d. posloupnost je klesající

3.

a.  $x \in (0; \infty)$

b.  $x \in (0; \infty)$

# Řešení:

1.

a.  $a_1 = -2$ ;  $a_{n+1} = n \cdot a_n$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = 1 \cdot a_1 \Rightarrow a_2 = 1 \cdot (-2) = -2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = 3 \cdot a_3 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot (-4) = -12$$

$a_n \geq a_{n+1}$  posloupnost je nerostoucí, shora omezená,  $M = -2$

b.  $a_1 = 3$ ;  $a_{n+1} = 2n + a_n$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = 2 \cdot 1 + a_1 \Rightarrow a_2 = 2 + 3 = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = 2 \cdot 2 + a_2 \Rightarrow a_3 = 4 + 5 = 9$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = 2 \cdot 3 + a_3 \Rightarrow a_4 = 6 + 9 = 15$$

$a_n < a_{n+1}$  posloupnost je rostoucí, zdola omezená,  $m = 3$

c.  $a_1 = -1$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2 + a_1 + 1 \Rightarrow a_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3 + a_2 + 2 \Rightarrow a_4 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$a_n \leq a_{n+1}$  posloupnost je neklesající, zdola omezená,  $m = -1$

d.  $a_1 = 1$ ;  $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = (-1)^1 \cdot a_1 = (-1)^1 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = -1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = (-1)^2 \cdot a_2 = (-1)^2 \cdot (-1) \Rightarrow a_3 = -1$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = (-1)^3 \cdot a_3 = (-1)^3 \cdot (-1) \Rightarrow a_4 = 1$$

posloupnost je nemonotónní, omezená,  $M = 1$ ;  $m = -1$

2.

a.  $(3n - 1)_{n=1}^{\infty}$

určíme několik členů posloupnosti

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_n < a_{n+1} \quad \text{posloupnost je rostoucí}$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

$$\text{důkaz:} \quad a_n = 3n - 1 \quad a_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 2$$

$$\text{platí} \quad a_n < a_{n+1}$$

$$3n - 1 < 3n + 2$$

$$-1 < 2 \quad \text{platí}$$

**posloupnost je rostoucí**

b.  $\left(\frac{n+2}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

určíme několik členů posloupnosti

$$a_1 = \frac{1+2}{3 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$a_2 = \frac{2+2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad a_n > a_{n+1} \quad \text{posloupnost je klesající}$$

$$a_3 = \frac{3+2}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}$$

$$\text{důkaz:} \quad a_n = \frac{n+2}{3n} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{3(n+1)} = \frac{n+3}{3n+3}$$

$$\text{platí} \quad a_n > a_{n+1}$$

$$\frac{n+2}{3n} > \frac{n+3}{3n+3} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow 3n > 0 \text{ a } 3n+3 > 0$$

$$(n+2)(3n+3) > 3n(n+3)$$

$$3n^2 + 9n + 6 > 3n^2 + 9n$$

$$6 > 0 \quad \text{platí}$$

**posloupnost je klesající**

c.  $(5^n)_{n=1}^{\infty}$

určíme několik členů posloupnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= 5^1 = 5 \\ a_2 &= 5^2 = 25 \\ a_3 &= 5^3 = 125 \end{aligned} \Rightarrow \text{posloupnost je rostoucí}$$

důkaz:  $a_n = 5^n \quad a_{n+1} = 5^{n+1}$

platí  $a_n < a_{n+1}$

$$5^n < 5^{n+1} \quad a = 5 \in (1; \infty) \Rightarrow \text{znak nerovnosti se při přechodu od základu } n < n+1 \text{ mocnin k exponentům nemění}$$

$$0 < 1 \quad \text{platí}$$

**posloupnost je rostoucí**

d.  $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

určíme několik členů posloupnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \\ a_2 &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ a_3 &= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \end{aligned} \Rightarrow \text{posloupnost je klesající}$$

důkaz:  $a_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad a_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

platí  $a_n > a_{n+1}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n > \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad a = \frac{1}{3} \in (0; 1) \Rightarrow \text{znak nerovnosti se při přechodu od základu } n < n+1 \text{ mocnin k exponentům mění v opačný}$$

$$0 < 1 \quad \text{platí}$$

**posloupnost je klesající**

3.

a.  $(4 - nx)_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = 4 - nx \quad a_{n+1} = 4 - (n+1)x = 4 - nx - x$$

klesající posloupnost  $\Rightarrow a_n > a_{n+1}$

$$4 - nx > 4 - nx - x$$

$$0 > -x \Rightarrow x > 0$$

**posloupnost je klesající pro  $x \in (0; \infty)$**

b.  $\left(\frac{2nx}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = \frac{2nx}{n+1} \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)x}{(n+1)+1} = \frac{2nx+2x}{n+2}$$

rostoucí posloupnost  $\Rightarrow a_n < a_{n+1}$

$$\frac{2nx}{n+1} < \frac{2nx+2x}{n+2} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 > 0; \quad n+2 > 0$$

$$2nx(n+2) < (2nx+2x)(n+1)$$

$$2n^2x + 4nx < 2n^2x + 4nx + 2x$$

$$0 < 2x \Rightarrow x > 0$$

**posloupnost je rostoucí pro  $x \in (0; \infty)$**