



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vztah mezi algebraickým a goniometrickým tvarem komplexního čísla

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

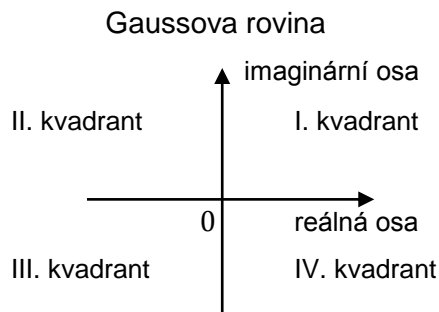
Zopakujme si:

Komplexní číslo:

Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2 i$

Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$a_1 = |a| \cdot \cos \alpha \quad a_2 = |a| \cdot \sin \alpha$$



kvadrant, osa	algebraický tvar - znaménka	goniometrický tvar - úhel
I.	+ +	$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
II.	- +	$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
III.	- -	$\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$
IV.	+ -	$\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$
reálná osa	reálné číslo + nebo -	$\alpha = 0$ nebo $\alpha = \pi$
imaginární osa	ryze imaginární číslo + nebo -	$\alpha = \frac{\pi}{2}$ nebo $\alpha = \frac{3}{2}\pi$

1. Zapište komplexní číslo $a = \frac{7-i}{4+3i}$ v goniometrickém tvaru.
2. Určete $|z|$: $z = 6(\cos \pi + i \sin \pi) + 10\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) - 7 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
3. Rozhodněte, ve kterém kvadrantu leží komplexní číslo $b = u \cdot v + \frac{u}{v}$
 $u = 5 + i\sqrt{3} \quad v = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
4. Určete $x, y \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo: $x \cdot 6 \cos \frac{7\pi}{6} + y \cdot 6 i \sin \frac{7\pi}{6} = (\sqrt{3} - 3i)(2i\sqrt{3} - 3)$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
 Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Výsledky:

1. $a = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$
2. $|z| = 5$
3. b leží v I. kvadrantu
4. $[x; y] = [-1; -5]$

Řešení:

$$1. \quad a = \frac{7-i}{4+3i} = \frac{7-i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{28-4i-21i+3i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{25-25i}{16-9i^2} = \frac{25-25i}{16+9} = \frac{25-25i}{25} = 1-i$$

$$\text{IV. kvadrant} \quad |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \cos \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha = \frac{7}{4}\pi$$

$$a = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

$$2. \quad z = 6(\cos \pi + i \sin \pi) + 10\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) - 7 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\ = 6(-1 + i \cdot 0) + 10\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 7(0 + i \cdot 1) = -6 + 10 + 10i - 7i = 4 + 3i$$

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$3. \quad b = u \cdot v + \frac{u}{v} = (5 + i\sqrt{3}) \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + \frac{5+i\sqrt{3}}{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} = \\ = (5 + i\sqrt{3}) \cdot 2 \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{5+i\sqrt{3}}{2 \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = (5 + i\sqrt{3}) \cdot (1 + i\sqrt{3}) + \frac{5+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \\ = 5 + i\sqrt{3} + 5i\sqrt{3} + 3i^2 + \frac{5+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = 2 + 6i\sqrt{3} + \frac{5+i\sqrt{3}-5i\sqrt{3}-3i^2}{1-3i^2} = \\ = 2 + 6i\sqrt{3} + \frac{8-4i\sqrt{3}}{4} = 2 + 6i\sqrt{3} + 2 - i\sqrt{3} = 4 + 5i\sqrt{3}$$

Komplexní číslo b leží v I. kvadrantu.

4. Nejprve obě strany rovnice upravíme na algebraický tvar:

$$x \cdot 6 \cos \frac{7\pi}{6} + y \cdot 6 i \sin \frac{7\pi}{6} = (\sqrt{3} - 3i)(2i\sqrt{3} - 3)$$

$$x \cdot 6 \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) + y \cdot 6 i \left(-\sin \frac{\pi}{6}\right) = 6i - 6i^2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 9i$$

$$x \cdot 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y \cdot 6 i \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 15i$$

Pro rovnost komplexních čísel platí:

$$-x \cdot 3\sqrt{3} - y \cdot 3 i = 3\sqrt{3} + 15i \quad \rightarrow \quad -x \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = -1}$$

$$\rightarrow \quad -y \cdot 3 = 15 \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = -5}$$

$$\mathbf{[x; y] = [-1; -5]}$$