

Celorepubliková síť Laborky.cz při Gymnáziu v Slaném

CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_010/0000540

METODICKÝ LIST 06

Lze náhodu předvídat?



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

GVBT
GYMNÁZIUM VÁCLAVA BENEŠE TŘEBÍZSKÉHO



Pomůcky

Mince, papír a tužka, kalkulačka

Praktické cvičení

Lidé jsou už od pradávna obklopeni náhodou a nepředvídatelnými jevy. Někdy jde o katastrofu, jindy o příležitost. Náhodné jevy umí výrazně měnit prostředí okolo nás. Proto nemá mozek lidí náhodu rád. Přirozeně se jí bojí. Náš mozek má rád stálé a neměnné prostředí, které důvěrně zná a dokonale předvídá. Náhoda ho ruší a svým způsobem i přitahuje. Přitahuje ho jí ovládnout a předvídat, spočítat a vrátit se do prostředí stálého klidu, kde lidskému tělu nic nehrozí.

Jde náhodu předvídat?

Dejte žákům prostor pro jejich nápady, včetně těch nesprávných. Pokud odpoví, že ano, pak je nechte přemýšlet o různých oborech lidské činnosti, které jsou na předvídání náhody založené.

Už v 17. století přišli matematici na to, že s náhodou se dá pracovat. Sice ne úplně jí předvídat, ale aspoň zlepšit počet správných odpovědí. Vznikl tak obor matematiky, který se náhodě přímo věnuje - Pravděpodobnost a statistika. Pojďme si takové předvídání náhody pomocí pravděpodobnosti vyzkoušet.

Vezměte si do ruky minci. Jaká je šance/pravděpodobnost, že padne po hodu mincí panna? Co myslíte? Je to 50 %. Zkusíme si to. Hod'te desetkrát mincí a zaznamenejte výsledky. Jaká Vám vyšla pravděpodobnost? Většinou se očekávanému výsledku ani neblíží. Zkrátka panna rozhodně nepadá každý druhý hod. Vše ovlivňuje náhoda. Zkusíme si experiment ještě dvakrát, ale tentokrát uděláme hodů padesát a poté rovnou stovku. Svoje výsledky si zaznamenávejte a pak spočítejte pravděpodobnost každého ze tří experimentů. Co Vám vyšlo a co to znamená pro ovládání náhody?

Výsledek

Čím více máme pokusů, tím se pravděpodobnost jevu „padne panna“ více blíží 50%.

Vysvětlení

Čím více se nějaký náhodný jev opakuje, tím více se výsledek blíží naší matematické předpovědi. Tohoto principu využívají rulety a kasina. V těchto hrách je sice možné jednorázově vyhrát vysokou částku, ale v dlouhodobější perspektivě hráč o peníze přichází. Všechna pravidla jsou nastavena tak, aby v zisku byl provozovatel kasina. Na jeho straně je matematika a přesné propočty. On „ovládá náhodu“.

Britský matematik John Kerrich byl během druhé světové války zatčen a internován. Během svého věznění si zkusil 10 000krát hodit mincí. Panna padla v 50,67 % případů.



Další náměty

Místo obvyklých rozšiřujících otázek uvádíme 5 námětů k zamyšlení a vyřešení. Mnohé z nich napadnou i Vaše žáky. Zkuste se jich zeptat.

1. Proč jsou hazardní hry návykové?

Hazardní hry jsou nebezpečné a návykové. Když totiž člověk hraje dlouhou řadu her a stále prohrává, přirozeně se začne domnívat, že už musí přijít výhra. Je to pravda?

Udělejte pokus:

Osoba A bude 25krát házet mincí a zapíše si výsledky.

Osoba B si bude představovat 25 hodů mincí a zapíše si tyto představované výsledky.

Pak oba zápisy porovnejte.

Ve skutečném zápisu budou zřejmě delší série jednoho výsledku a méně často bude docházet ke změně „panny“ v „orla“ nebo naopak. Náš mozek má totiž tendenci častěji měnit výsledek směrem k opačné možnosti, přestože v dané chvíli je šance na oba výsledky stále totožná.

2. Monty Hallův problém

S pravděpodobností souvisí i různé televizní soutěže. V jedné z nich se vyskytuje následující situace: Vítěz soutěže má před sebou troje dveře, za jedněmi z nich je auto, za zbývajícími jsou ceny útěchy - živé kozy. Soutěžící označí jedny dveře, za kterými si myslí, že je auto (předpokládáme, že raději vyhraje auto než kozu). Moderátor mu otevře jiné, za kterými je koza. Soutěžící má potom dvě možnosti - buď bude trvat na své volbě nebo ji může změnit. Co je pro soutěžícího výhodnější (kdy má větší pravděpodobnost výhry)? Popsanou situaci můžete najít pod názvem Monty Hallův problém (podle moderátora soutěže). Řešení můžete najít v několika videích na youtube.cz .

3. Jaká je pravděpodobnost výhry v loterii a vyplatí se vůbec sázet?

Velmi pravděpodobně si někdo z Vás představil, jaké by to bylo, vyhrát první cenu v nějaké loterii. V televizi běží reklamy na bezstarostný život, který by Vám výhra přinesla. Položili jste si ale otázku, jaká je pravděpodobnost výhry a kolik by stálo zajistit si vsazením všech možných kombinací čísel jistou výhru?

Sportka je loterie, ve které vyhráváte první cenu, jestliže v tiketu zaškrtnete v jednom sloupci 6 správných čísel ze 49 možných. Na jednom tiketu je možné vsadit 10 sloupců. Nejvyšší výhry, tzv. Superjackpotu, získáte tehdy, jestliže na tiketu vyplníte všech 10 sloupců a další hru zvanou Šance. Hra Šance souvisí s číslem tiketu, pro naše potřeby budeme pracovat s tím, že pro výhru Superjackpotu musíte uhádnout všech 6 tažených čísel a poslední číslici z čísla tiketu.

V loterii nezáleží na tom, v jakém pořadí jsou tažená vítězná čísla. (U první výhry neuvažujeme „dodatkové číslo“, proto se o něm dále nebudeme zmiňovat.) Jestliže nám nezáleží na pořadí, mluvíme o kombinacích. Čísla se nemohou opakovat, proto jde o kombinace bez opakování. Počet možných kombinací bez opakování určíme podle vzorce

$C(k, n) = \binom{n}{k}$, kde k je počet čísel, která vybíráme, n je počet čísel, z kolika vybíráme.

Vztah $\binom{n}{k}$ čteme „en nad ká“.



Úkol 1: Najděte, jak se počítá $\binom{n}{k}$. Co musí platit pro n a k ? Pomocí nalezeného vztahu vypočtěte $\binom{7}{2}$, $\binom{8}{7}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{7}{7}$.

Úkol 2: Víme, že se ve Sportce losuje 6 čísel ze 49. Kolik je možných výsledků losování?

Při výpočtu pravděpodobnosti výhry si vystačíme se základním vzorcem $P(A) = \frac{|A|}{|\omega|}$, kde $P(A)$ je pravděpodobnost jevu A , $|A|$ je počet příznivých jevů, $|\omega|$ je počet všech možných jevů.

Úkol 3: Určete pravděpodobnost první výhry ve Sportce, tj. uhádnutí 6 čísel ze 49.

Protože se ve Sportce losují vždy dva tahy, pravděpodobnost z úkolu 3 vynásobte dvěma. Přijde Vám to jako velká šance?

Úkol 4: Kolik by stálo vsazení všech možných kombinací, abychom měli jistotu výhry Superjackpotu - uhádnout výherní kombinaci a poslední číslici z čísla tiketu? Jeden sloupeček stojí 20 korun, Šance stojí také 20 korun. Jeden tiket tedy stojí 220 Kč. Kolik tiketů musíme vyplnit, abychom vypsali všechny kombinace? Jak dlouho by trvalo vyplnění všech tiketů, jestliže jeden tiket budeme vyplňovat 5 sekund - samozřejmě teoreticky?

Úkol 5: Najděte na internetu, jaká byla nejvyšší výhra ve Sportce. Jaká by byla Vaše ztráta?

Vyplnění všech možných kombinací nám ještě nedává jistotu, že vyhraje celý Superjackpot. Problém by nastal v okamžiku, kdy Vaše čísla vsadí více lidí, pak se výhra dělí počtem výherců.

Pravděpodobnost tažení každého čísla je 1 ku 49.

Úkol 6: Najděte, která čísla byla tažena nejčastěji.

Úkol 7: Bude pravděpodobnost tažení sudého čísla stejná jako pravděpodobnost tažení lichého čísla?

Řešení

Úkol 1: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$

$$\binom{7}{2} = 21, \quad \binom{8}{7} = 8, \quad \binom{5}{0} = 1, \quad \binom{7}{7} = 1$$

Úkol 2: $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ možných kombinací

Úkol 3: Pravděpodobnost výhry v jednom tahu je $\frac{1}{13\,983\,816}$



Úkol 4: Jestliže chceme vyhrát Superjackpot, musíme uvažovat 10 různých koncových číslic a vytažení 6 čísel ze 49, tj. $10 \cdot 13\,983\,816 = 139\,838\,160$ kombinací. Na tiket můžeme zapsat 10 kombinací, to znamená, že musíme vyplnit 13 983 816 tiketů, každý po 220 korunách. Celkem nás jistota výhry Superjackpotu bude stát 3 076 439 520 korun. Vyplnění všech tiketů by trvalo 69 919 080 sekund, tj. přibližně 19 422 hodin = 2 roky a 79 dní nepřetržitého vyplňování.

Úkol 5: Zatím nejvyšší výhra ve Sportce byla cca 400 miliónů korun. Tratíme cca 2 676 440 000 korun.

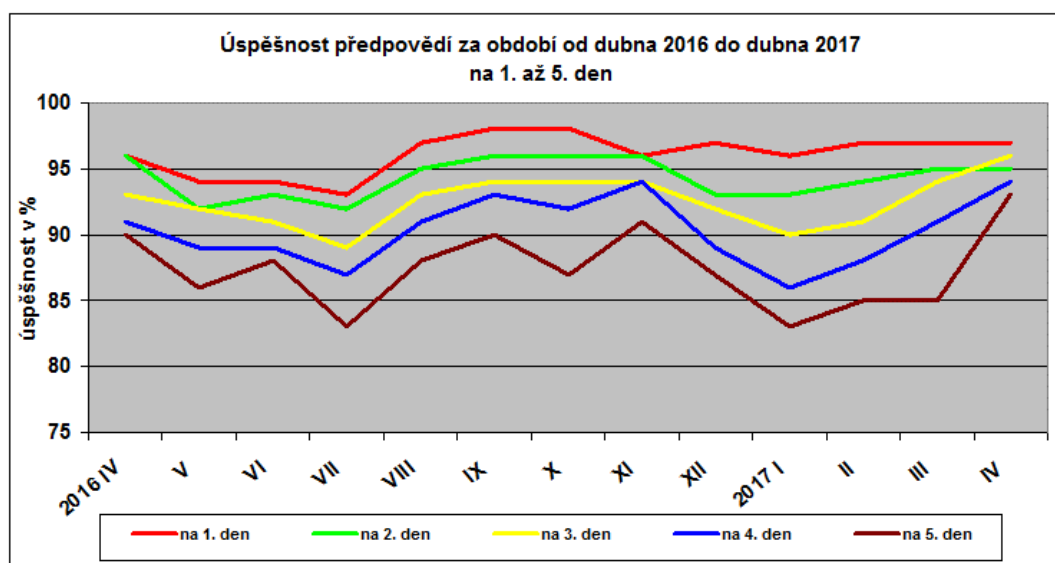
Úkol 6: Na stránkách <https://www.sazka.cz/loterie/sportka/statistiky> je přehled tažených čísel, podle tohoto přehledu je nejčastěji taženým číslem 6, které bylo taženo 1202 krát.

Úkol 7: Nebude, protože sudých čísel je 24 a lichých 25, proto pravděpodobnost tažení lichého čísla je větší.

4. Pravděpodobnost předpovědi počasí

Jak se lidstvo rozvíjí, zvyšuje se s tím i jeho potřeba po stále přesnějších a specializovanějších předpovědích. Jinou předpověď potřebují silničáři, jinou zemědělci, armáda, Řízení letového provozu, stavaři, jinou veřejnost. Důvodem těchto potřeb jsou činnosti a obory, které dříve buď vůbec neexistovaly, nebo nebyly tak rozvinuté. Naštěstí i meteorologie jako vědní obor se s tím ruku v ruce rozvíjí a vlivem nových dostupných technologií získává stále větší a větší možnosti.

Úspěšnost předpovědi počasí klesá s délkou předpovědního období. Dostí přesnou předpověď lze poskytnout zhruba na 5 dní dopředu (v závislosti na meteorologické situaci), proto ČHMÚ denně vydává předpověď pro ČR na aktuální den a následujících 5 dní (členěné po dnech) s vyhlídkou na další 3 dny, které už po dnech členěny nejsou. Předpověď na více než 10 dní může říci spíše jen předpokládaný charakter počasí, nikoli jak bude v konkrétní dny. Na aktuální den a noc a následující tři dny jsou vydávány i regionální předpovědi pro jednotlivé kraje v ČR, které mohou více postihnout regionální odlišnosti počasí, než je možno uvést v předpovědi pro celou ČR. Úspěšnost předpovědi ČHMÚ na jeden den je udávána kolem 95%, na druhý den kolem 90%, třetí a čtvrtý den kolem 80%. Na týden pak něco kolem 70%.



Zdroj: <http://portal.chmi.cz/predpovedi/predpovedi-pocasi/ceska-republika/uspesnost-predpovedi-pocasi/mesicni>



5. Jak fungují pojišťovny?

Pojišťovací systémy jsou také založeny na počítání pravděpodobností. Matematici v pojišťovnách sestavují tabulky tak, aby vyplácely méně než vyberou na pojistném. Znají ze statistik pravděpodobnost jednotlivých pojistných událostí (vloupání, požáru, dlouhodobé nemoci atd.) a určí, jak vysoké bude plnění za každou tuto událost tak, aby se celkové předpokládané plnění klientům rovnalo částce, kterou chtějí celkem zaplatit. Přesto je lepší přijít o peníze zaplacené „zbytečně“ za pojistné, protože se tím chráníme před velkou finanční ztrátou v případě nějaké nepříznivé události.



Vazby na RVP ZV/RVP G

RVP G

Rozvíjí klíčové kompetence:

- kompetenci k učení,
- kompetenci k řešení problémů,
- kompetenci komunikativní
- kompetenci k podnikavosti

Vzdělávací oblasti:

5.2 Matematika a její aplikace

5.2.1 Matematika a její aplikace

- kombinatorika - elementární kombinatorické úlohy, kombinace
- pravděpodobnost - náhodný jev a jeho pravděpodobnost
- práce s daty - statistický soubor

5.7 Člověk a zdraví

5.7.1 Výchova ke zdraví

- návykovost - patologické hráčství

5.8 Informatika a informativní a komunikační technologie

5.8.1 Informatika a informativní a komunikační technologie

- informace - relevance, věrohodnost
- vyhledávání informací, práce s informacemi

Rozvíjí průřezová témata:

- 6.1 Osobnostní a sociální výchova
- 6.5 Mediální výchova



RVP ZV

Rozvíjí klíčové kompetence:

- kompetenci k učení,
- kompetenci k řešení problémů,
- kompetenci komunikativní,
- kompetenci sociální a personální

Vzdělávací oblasti:

5.2 Matematika a její aplikace

5.2.1 Matematika a její aplikace

- závislosti a data
- číselné a logické řady

5.3 Informační a komunikační technologie

5.3.1 Informační a komunikační technologie

- vyhledávání informací
- zpracování a využití informací

5.8 Člověk a zdraví

5.8.1 Výchova ke zdraví

- autodestruktivní závislosti - patologické hráčství

Rozvíjí průřezová témata:

- 6.1 Osobnostní a sociální výchova
- 6.6 Mediální výchova