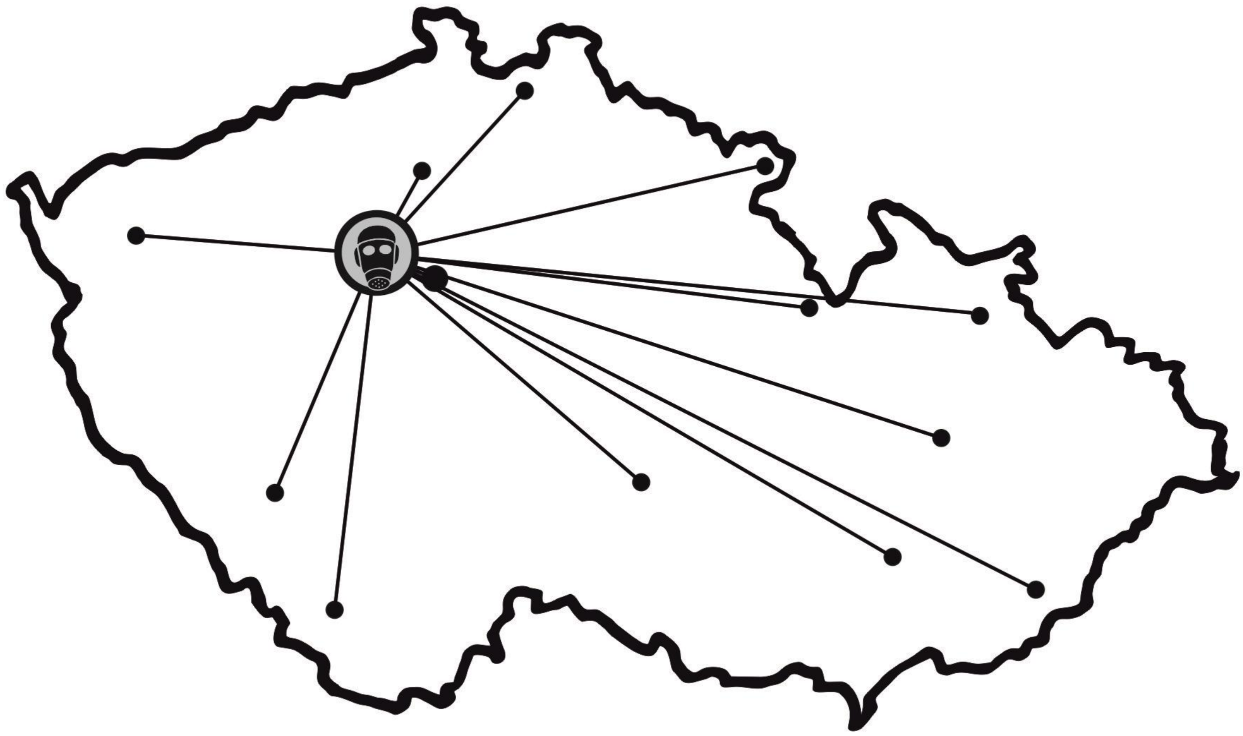


Celorepubliková síť Laborky.cz při Gymnáziu v Slaném

CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_010/0000540

METODICKÝ LIST 06

Lze náhodu předvídat?

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

GYMNÁZIUM VÁCLAVA BENEŠE TŘEBÍZSKÉHO

Pomůcky

Mince, papír a tužka, kalkulačka

Praktické cvičení

Lidé jsou již odpradávna obklopeni náhodnými či nepředvídatelnými jevy, které na ně mohou mít nejen pozitivní, ale i negativní dopady. Ty mají někdy i zásadní vliv na naše životní osudy, a proto je pochopitelné, že lidské myšlení se náhod většinou obává. Mozek je nastaven tak, že preferuje spíše stálé a neměnné prostředí, které důvěrně zná a dokonale předvídá. Náhoda ho ruší a svým způsobem i přitahuje. Přitahuje ho nahodilost ovládnout a předvídat, spočítat a vrátit se do prostředí stálého klidu, kde lidskému tělu nic nehrozí.

Je možné náhodu předvídat?

Dejte žákům prostor pro jejich nápady, včetně těch nesprávných. Pokud na výše položenou otázku odpoví ano, pak je nechte přemýšlet o různých oborech lidské činnosti, které jsou na předvídání náhody založené.

Již v 17. století dospěli matematici k názoru, že s momentem náhody je možné pracovat jako s určitou veličinou. Nelze ji sice úplně předvídat, ale lze zvýšit počet správných odpovědí při řešení zkoumaných skutečností a jevů. Vznikl tak samostatný vědní obor matematiky, který se problematice náhod přímo věnuje a nazývá se *Pravděpodobnost a statistika*. Pojďme si takové předvídání náhody pomocí počtu pravděpodobnosti vyzkoušet.

Vezměte si do ruky minci. Jaká je šance (pravděpodobnost), že padne po hodu mincí strana, která je tradičně označovaná jako „ panna“? Co myslíte? Tato možnost je pochopitelně 50procentní. Zkusíme si to. Hoďte desetkrát mincí a zaznamenejte výsledky. Jaká Vám vyšla pravděpodobnost?

Většinou se očekávanému výsledku ani neblíží. Zkrátka „panna“ rozhodně nepadá po každém druhém hodu. Zkusíme si experiment ještě dvakrát, ale tentokrát vykonáme pokusů padesát a poté celou stovku. Výsledky jednotlivých hodů si zaznamenávejte a pak spočítejte pravděpodobnost každého ze tří experimentů. Jaké výsledky Vám vyšly a co zjištěné údaje znamenají pro statistické zhodnocení prvku náhody?

Výsledek

Čím více pokusů vykonáme, tím se pravděpodobnost situace, že „padne panna“, více blíží padesáti procentům.

Britský matematik John Kerrich byl během druhé světové války zatčen a internován. Během svého věznění si zkusil 10 000krát hodit mincí. „Panna“ padla v 50,67 % případů.

Vysvětlení

Čím více se nějaký náhodný jev opakuje, tím více se výsledek blíží naší matematické předpovědi. Tohoto principu využívají rulety a kasina. V hazardních hrách, které se zde provozují, je sice možné jednorázově vyhrát vysokou finanční částku, ale v dlouhodobější perspektivě hráč o své peníze přijde, neboť herní systém je nastaven tak, aby v zisku byl trvale provozovatel kasina. Na jeho straně jsou totiž matematicky přesné propočty. Je to on, kdo „ovládá náhodu“.

Další náměty:

Místo obvyklých rozšiřujících otázek uvádíme 5 námětů k zamyšlení a vyřešení. Mnohé z nich napadnou i Vaše žáky. Zkuste se jich zeptat.

1) Proč jsou hazardní hry návykové?

Hazardní hry jsou nebezpečné a návykové. Když totiž člověk hraje dlouhou řadu her a stále prohrává, přirozeně se začne domnívat, že již musí přijít výhra. Zakládá se tento předpoklad na realitě?

Udělejte pokus:

Osoba A bude 25krát házet mincí a zapíše si výsledky.

Osoba B si bude představovat 25 hodů mincí a zapíše si tyto představované výsledky.

Pak oba zápisy porovnejte.

Ve skutečném zápisu budou zřejmě delší série jednoho výsledku a méně často bude docházet ke změně „panny“ v „orla“ nebo naopak. Náš mozek má totiž tendenci častěji měnit výsledek směrem k opačné možnosti, přestože v dané chvíli je šance na oba výsledky stále totožná.

2) Monty Hallův problém

S oborem pravděpodobnosti souvisí i různé televizní soutěže. V jedné z nich se vyskytuje následující situace: Vítěz soutěže má před sebou troje dveře. Za jedněmi z nich se nachází auto, za zbývajícími jsou ceny útěchy - živé kozy. Soutěžící označí jedny dveře, za kterými si myslí, že je auto (předpokládáme, že raději vyhraje auto než kozu). Moderátor mu otevře jiné, za kterými je koza. Soutěžící má potom dvě možnosti – buď bude trvat na své volbě, nebo ji může změnit. Co je pro soutěžícího výhodnější, respektive kdy pro něj existuje vyšší pravděpodobnost výhry? Popsanou situací se zabývá tzv. *Monty Hallův problém*. Řešení můžete najít v několika videích na youtube.cz .

3) Jaká je pravděpodobnost výhry v loterii a vyplatí se vůbec sázet?

Velmi pravděpodobně si někdo z Vás představil, jaké by to bylo, kdyby vyhrál první cenu v nějaké loterii. V televizi běží reklamy na bezstarostný život, který by Vám výhra přinesla. Položili jste si ale otázku, jaká je pravděpodobnost výhry a kolik by stálo zajistit si vsazením všech možných kombinací čísel jistou výhru?

Sportka je loterie, ve které vyhráváte první cenu, jestliže v tiketu zaškrtnete v jednom sloupci 6 správných čísel ze 49 možných. Na jednom tiketu je možné vsadit 10 sloupců. Nejvyšší výhry, tzv. Superjackpotu, získáte tehdy, jestliže na tiketu vyplníte všech 10 sloupců a další hru zvanou Šance. Hra Šance souvisí s číslem tiketu, pro naše potřeby budeme pracovat s tím, že pro výhru Superjackpotu musíte uhádnout všech 6 tažených čísel a poslední číslici z čísla tiketu.

V loterii nezáleží na tom, v jakém pořadí jsou tažená vítězná čísla. (U první výhry neuvažujeme „dodatkové číslo“, proto se o něm dále nebudeme zmiňovat.) Jestliže nám nezáleží na pořadí, mluvíme o kombinacích. Čísla se nemohou opakovat, proto se jedná o kombinace bez opakování.

Počet možných kombinací bez opakování určíme podle vzorce $C(k,n)=\binom{n}{k}$, kde k je počet čísel, která vybíráme, n je počet čísel, z kolika vybíráme. Vztah $\binom{n}{k}$ čteme „en nad ká“.

Úkol 1: Najděte, jak se počítá $\binom{n}{k}$. Co musí platit pro n a k ? Pomocí nalezeného vztahu vypočtěte $\binom{7}{2}$, $\binom{8}{7}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{7}{7}$.

Úkol 2: Víme, že se ve Sportce losuje 6 čísel ze 49. Kolik je možných výsledků losování?

Při výpočtu pravděpodobnosti výhry si vystačíme se základním vzorcem $P(A) = \frac{|A|}{|\omega|}$, kde $P(A)$ je pravděpodobnost jevu A, $|A|$ je počet příznivých jevů, $|\omega|$ je počet všech možných jevů.

Úkol 3: Určete pravděpodobnost první výhry ve Sportce, tj. uhádnutí 6 čísel ze 49.

Protože se ve Sportce losují vždy dva tahy, pravděpodobnost z **úkolu 3** vynásobte dvěma. Přijde Vám to jako velká šance?

Úkol 4: Kolik by stálo vsazení všech možných kombinací, abychom měli jistotu výhry Superjackpotu? To znamená uhádnout výherní kombinaci a poslední číslici z čísla tiketu? Jeden sloupeček stojí 20 korun, Šance stojí také 20 korun. Za jeden tiket je tedy nutno zaplatit 220 Kč. Kolik tiketů musíme vyplnit, abychom vypsali všechny kombinace? Jak dlouho by trvalo vyplnění všech tiketů, jestliže jeden tiket budeme teoreticky vyplňovat pouhých 5 sekund?

Úkol 5: Vyhledejte na internetu, jaká byla nejvyšší výhra ve Sportce. Jaká by byla Vaše ztráta?

Vyplnění všech možných kombinací nám ještě nedává jistotu, že vyhrajeme celý Superjackpot. Problém by nastal v okamžiku, kdy Vaše čísla vsadí více lidí, pak se výhra dělí počtem výherců.

Pravděpodobnost tažení každého čísla je 1 ku 49.

Úkol 6: Najděte, která čísla byla tažena nejčastěji.

Úkol 7: Bude pravděpodobnost tažení sudého čísla stejná jako pravděpodobnost tažení lichého čísla?

Řešení:

Úkol 1: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \in N_0, k \in N_0, n \geq k$

$\binom{7}{2} = 21,\quad \binom{8}{7} = 8,\quad \binom{5}{0} = 1,\quad \binom{7}{7} = 1$

Úkol 2: $\binom{49}{6} = 13\,983\,816\ možných\ kombinací$

Úkol 3: $Pravděpodobnost\ výhry\ v\ jednom\ tahu\ je\ \frac{1}{13\,983\,816}$

Úkol 4: Jestliže chceme vyhrát Superjackpot, musíme uvažovat 10 různých koncových číslic a vytažení 6 čísel ze 49, tj. $10 \cdot 13\,983\,816 = 139\,838\,160$ kombinací. Na tiket můžeme zapsat 10 kombinací, to znamená, že musíme vyplnit 13 983 816 tiketů, každý po 220 korunách. Celkem nás jistota výhry Superjackpotu bude stát 3 076 439 520 korun. Vyplnění všech tiketů by trvalo 69 919 080 sekund, tj. přibližně 19 422 hodin $=$ 2 roky a 79 dní nepřetržitého vyplňování.

Úkol 5: Zatím nejvyšší výhra ve Sportce byla cca 400 miliónů korun. I v případě takto vysoké výhry bychom tratili přibližně 2 676 440 000 korun.

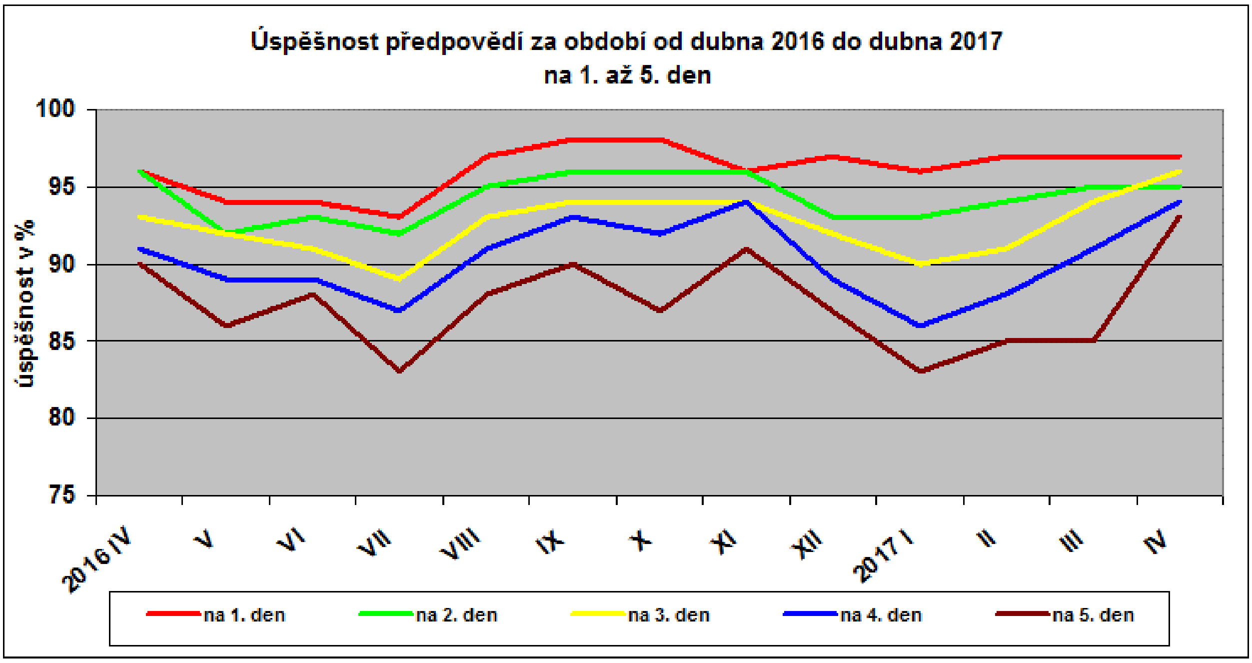
Úkol 6: Na stránkách https://www.sazka.cz/loterie/sportka/statistiky je přehled tažených čísel, podle tohoto přehledu je nejčastěji taženým číslem 6, které bylo taženo 1202 krát.

Úkol 7: Nebude, protože sudých čísel je 24 a lichých 25, proto pravděpodobnost tažení lichého čísla je vyšší.

4) Pravděpodobnost předpovědi počasí

Jak se moderní společnost rozvíjí, zvyšuje se i její potřeba po stále přesnějších a specializovanějších předpovědích počasí. Jinou předpověď ovšem potřebují například silničáři, jinou zemědělci, příslušníci armády, zaměstnanci řízení letového provozu, stavaři apod. Důvodem vzniku těchto obsahově různých předpovědí počasí jsou činnosti a obory, které dříve buď vůbec neexistovaly, nebo nebyly tak rozvinuté. Proto i meteorologie jako vědní obor se stává sofistikovanější a vlivem nových dostupných technologií získává stále větší možnosti využití.
Úspěšnost předpovědi počasí klesá s délkou předpovědního období. Dosti přesnou předpověď lze poskytnout přibližně na 5 dní dopředu (v závislosti na meteorologické situaci), proto ČHMÚ denně vydává předpověď pro ČR na aktuální den a následujících 5 dní (členěné na jednotlivé dny) s vyhlídkou na další 3 dny, které už po dnech členěny nejsou.

Předpověď na více než 10 dní může naznačit spíše jen předpokládaný charakter počasí, nikoli přesnou prognózu pro konkrétní dny. Pro předpověď počasí na nejbližší den a noc a následující tři dny jsou vydávány i regionální předpovědi pro jednotlivé kraje v ČR, které mohou více zohlednit regionální odlišnosti počasí, než je možno uvést v předpovědi pro celou ČR. Úspěšnost předpovědi ČHMÚ na jeden den je udávána přibližně 95%, na druhý den kolem 90%, třetí a čtvrtý den asi 80%. Na nejbližší týden je úspěšnost předpovědi počasí zhruba 70procentní.



Zdroj: http://portal.chmi.cz/predpovedi/predpovedi-pocasi/ceska-republika/uspesnost-predpovedi-pocasi/mesicni

5) Na jakém principu poskytují své služby pojišťovny?

Pojišťovací systémy jsou také založeny na počítání pravděpodobností. Matematici v pojišťovnách sestavují tabulky tak, aby tyto instituce vyplácely méně peněz, než kolik vyberou na pojistném. Matematičtí analytici znají na základě statistik pravděpodobnost výskytu jednotlivých pojistných událostí (vloupání, požár, dlouhodobá nemoc), a proto určí, jak vysoké bude plnění za každou tuto událost, aby celkové předpokládané plnění finančních závazků pojišťoven vůči klientům bylo nižší než částka, kterou mají klienti uhradit na pojistném. I přesto je však pro pojištěné občany lepší přijít o peníze zaplacené „zbytečně“ na pojistném, protože se tak chrání před velkou finanční ztrátou v případě nastalé nepříznivé události, kterou předvídat nelze.

Vazby na RVP ZV/RVP G

RVP G

Rozvíjí klíčové kompetence:

- kompetenci k učení,
- kompetenci k řešení problémů,
- kompetenci komunikativní
- kompetenci k podnikavosti

Vzdělávací oblasti:

5.2 Matematika a její aplikace

5.2.1 Matematika a její aplikace

- kombinatorika – elementární kombinatorické úlohy, kombinace
- pravděpodobnost – náhodný jev a jeho pravděpodobnost
- práce s daty – statistický soubor

5.7 Člověk a zdraví

5.7.1 Výchova ke zdraví

- návykovost – patologické hráčství

5.8 Informatika a informativní a komunikační technologie

5.8.1 Informatika a informativní a komunikační technologie

- informace – relevance, věrohodnost
- vyhledávání informací, práce s informacemi

Rozvíjí průřezová témata:

- 6.1 Osobnostní a sociální výchova
- 6.5 Mediální výchova

RVP ZV

Rozvíjí klíčové kompetence:

- kompetenci k učení,
- kompetenci k řešení problémů,
- kompetenci komunikativní,
- kompetenci sociální a personální

Vzdělávací oblasti:

5.2 Matematika a její aplikace

5.2.1 Matematika a její aplikace

- závislosti a data
- číselné a logické řady

5.3 Informační a komunikační technologie

5.3.1 Informační a komunikační technologie

- vyhledávání informací
- zpracování a využití informací

5.8 Člověk a zdraví

5.8.1 Výchova ke zdraví

- autodestruktivní závislosti – patologické hráčství

Rozvíjí průřezová témata:

- 6.1 Osobnostní a sociální výchova
- 6.6 Mediální výchova