



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obecná rovnice hyperboly

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

1) Převed'te středovou rovnici hyperboly na obecnou rovnici:

$$\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+3)^2}{49} = 1.$$

2) Určete obecnou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[-2; -2]$, $K[2; -6]$, $a = 2$, o_1 je rovnoběžná s x .

3) Určete souřadnice středu, souřadnice ohnisek, poloosy, excentricitu a rovnice asymptot, je-li hyperbola dána obecnou rovnicí:

$$x^2 - y^2 + 4x + 8y - 22 = 0.$$

Výsledky: 1) Obecná rovnice hyperboly: $36x^2 - 49y^2 + 216x + 294y + 1647 = 0$
2) Obecná rovnice hyperboly: $4x^2 - 3y^2 + 16x - 12y - 12 = 0$
3) $S[-2; 4]$, $F_1[-2 - 2\sqrt{5}; 4]$, $F_2[-2 + 2\sqrt{5}; 4]$, $a = b = \sqrt{10}$, $e = 2\sqrt{5}$,
 $y_1 = x + 6$, $y_2 = -x + 2$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1) Převed'te středovou rovnici hyperboly na obecnou rovnici:

$$\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+3)^2}{49} = 1.$$

Obecná rovnice hyperboly má tvar: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Středovou rovnici postupnými úpravami převedeme na výše uvedený tvar - odstraníme zlomky, odstraníme závorky, čísla převedeme na levou stranu rovnice a seřadíme, upravíme znaménka dle vzoru.

$$\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+3)^2}{49} = 1 \quad \rightarrow \quad 49(y-3)^2 - 36(x+3)^2 = 1764$$

$$49y^2 - 294y + 441 - 36x^2 - 216x - 324 = 1764$$

$$36x^2 - 49y^2 + 216x + 294y - 441 + 324 + 1764 = 0$$

$$36x^2 - 49y^2 + 216x + 294y + 1647 = 0$$

$$\text{Obecná rovnice hyperboly: } 36x^2 - 49y^2 + 216x + 294y + 1647 = 0.$$

2) Určete obecnou rovnici hyperboly, je-li dáno: S[-2; -2], K[2; -6], a = 2, o₁ je rovnoběžná s x.

Obecná rovnice hyperboly má tvar: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Nejprve určíme středovou rovnici hyperboly, kterou postupnými úpravami převedeme na výše uvedený tvar - odstraníme zlomky, odstraníme závorky, čísla převedeme na levou stranu rovnice a seřadíme, upravíme znaménka dle vzoru.

Osa o hyperboly je rovnoběžná s osou x, střed S[m; n], hyperbola má středovou rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Leží-li bod K na hyperbole, vyhovují jeho souřadnice rovnici hyperboly.

Do rovnice dosadíme souřadnice středu S za m, n, za x, y souřadnice bodu K, hlavní poloosu a, vypočítáme odtud b². Vypočtené údaje dosadíme do středové rovnice.

Osa o hyperboly je rovnoběžná s osou x, potom má hyperbola středovou rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(2-(-2))^2}{2^2} - \frac{(-6-(-2))^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{16}{4} - \frac{16}{b^2} = 1 \quad \rightarrow$$

$$\frac{4}{1} - \frac{16}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 4b^2 - 16 = b^2 \quad \rightarrow \quad 3b^2 = 16 \quad \rightarrow \quad b^2 = \frac{16}{3}$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{\frac{16}{3}} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{3(y+2)^2}{16} = 1 \quad \rightarrow \quad 4(x+2)^2 - 3(y+2)^2 = 16$$

$$4x^2 + 16x + 16 - 3y^2 - 12y - 12 = 16 \quad \rightarrow \quad 4x^2 - 3y^2 + 16x - 12y - 12 = 0$$

Obecná rovnice hyperboly: $4x^2 - 3y^2 + 16x - 12y - 12 = 0$.

3) Určete souřadnice středu, souřadnice ohnisek, poloosy, excentricitu a rovnice asymptot, je-li hyperbola dána obecnou rovnicí:

$$x^2 - y^2 + 4x + 8y - 22 = 0.$$

Obecná rovnice hyperboly má tvar: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Abychom mohli určit požadované údaje, musíme převést obecnou rovnici postupnými úpravami na středový tvar.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 4x + 8y - 22 &= 0 & \rightarrow & x^2 + 4x - (y^2 - 8y) = 22 & \rightarrow \\ x^2 + 4x + 4 - (y^2 - 8y + 16) &= 22 + 4 - 16 & \rightarrow & (x + 2)^2 - (y - 4)^2 = 10 & \rightarrow \\ \frac{(x + 2)^2}{10} - \frac{(y - 4)^2}{10} &= 1 \end{aligned}$$

Hyperbola má středovou rovnici $\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$.

Osa o hyperboly je rovnoběžná s osou x, střed $S[m; n]$, a hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, je-li $a = b$, potom je hyperbola rovnoosá. Vzdálenost středu a ohniska je rovna excentricitě. Pro poloosy a, b, excentricitu e platí vztah: $e^2 = a^2 + b^2$.

Asymptoty jsou přímky, které procházejí středem hyperboly a nemají s hyperbolou žádný společný bod.

Rovnice asymptot rovnoosé hyperboly: $(y_1 - n) = \frac{a}{a} (x - m)$; $(y_2 - n) = -\frac{a}{a} (x - m)$.

$$S[-2; 4], a = \sqrt{10}, b = \sqrt{10}$$

$$e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow e^2 = 10 + 10 \rightarrow e^2 = 20 \rightarrow e = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$F_1[-2 - 2\sqrt{5}; 4], F_2[-2 + 2\sqrt{5}; 4]$$

$$y_1 - 4 = 1 \cdot (x + 2) \rightarrow y_1 = x + 6$$

$$y_2 - 4 = -1 \cdot (x + 2) \rightarrow y_2 = -x + 2$$