



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

- 1) Určete vzájemnou polohu kuželosečky a přímky p :
kuželosečka: $x^2 + y^2 = 16$, přímka p : $x - y + 4 = 0$.
- 2) Je dána kuželosečka a přímka p , určete rovnici tečny ke kuželosečce, tečna je rovnoběžná s přímkou p :
kuželosečka: $y^2 = -8x$, přímka p : $y = -x + 6$.
- 3) Stanovte číslo m tak, aby přímka t : $x + y + m = 0$ byla tečnou kružnice $x^2 + y^2 = 16$.
- 4) Určete rovnici tečny elipsy o rovnici $x^2 + 8y^2 - 6 = 0$, která je kolmá na přímkou p : $x - y + 2 = 0$.

Výsledky:

- 1) Daná kvadratická rovnice má dvě řešení, daná přímka je sečna kružnice
- 2) Hledaná tečna má rovnici: $y = -x + 2$
- 3) Existují dvě tečny k dané kružnici: t_1 : $x + y + 4\sqrt{2} = 0$; t_2 : $x + y - 4\sqrt{2} = 0$
- 4) Existují dvě tečny k dané kružnici: t_1 : $x + y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$; t_2 : $x + y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Řešení:

1) Určete vzájemnou polohu kuželosečky a přímky p :

kuželosečka: $x^2 + y^2 = 16$, přímka p : $x - y + 4 = 0$.

Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky určíme tak, že řešíme soustavu kvadratické a lineární rovnice metodou dosazovací. Z rovnice přímky vyjádříme proměnnou x a dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme kvadratickou rovnici, kde platí:

- má-li rovnice dvě řešení, je přímka sečna;
- má-li rovnice jedno řešení, je přímka tečna;
- je-li diskriminant menší než 0, rovnice nemá řešení, je přímka vnější přímkou kuželosečky.

Daná kuželosečka je kružnice.

přímka p : $x - y + 4 = 0 \rightarrow x = y - 4$, dosadíme do rovnice kružnice:

$$(y - 4)^2 + y^2 = 16 \rightarrow y^2 - 8y + 16 + y^2 = 16 \rightarrow 2y^2 - 8y = 0$$

$$y_1 = 0;$$

$$2y - 8 = 0 \rightarrow y_2 = 4$$

Daná kvadratická rovnice má dvě řešení, daná přímka je sečna kružnice.

2) Je dána kuželosečka a přímka p , určete rovnici tečny ke kuželosečce, tečna je rovnoběžná s přímkou p :

kuželosečka: $y^2 = -8x$, přímka p : $y = -x + 6$.

Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky určíme tak, že řešíme soustavu kvadratické a lineární rovnice metodou dosazovací. Z rovnice přímky vyjádříme proměnnou x a dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme kvadratickou rovnici, kde platí:

- má-li rovnice dvě řešení, je přímka sečna;
- má-li rovnice jedno řešení, je přímka tečna;
- je-li diskriminant menší než 0, rovnice nemá řešení, je přímka vnější přímkou kuželosečky.

Daná kuželosečka je parabola.

Hledaná přímka (označíme ji t) je rovnoběžná s přímkou p a má směrnici $k = -1$, její rovnice je $y = -x + c$. Dosadíme do rovnice paraboly a řešíme vzniklou kvadratickou rovnici, rovnice musí mít jedno řešení, v tom případě je diskriminant příslušné kvadratické rovnice roven 0.

Po dosazení: $(-x + c)^2 = -8x \rightarrow x^2 - 2xc + c^2 = -8x \rightarrow x^2 + 8x - 2xc + c^2 = 0$
 $x^2 + x(8 - 2c) + c^2 = 0$

pro koeficienty kvadratické rovnice platí: $a = 1$; $b = 8 - 2c$; $c = c^2$;

pro diskriminant kvadratické rovnice $D = b^2 - 4ac$ musí platit $D = 0 \rightarrow (8 - 2c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c^2 = 0$
 $64 - 32c + 4c^2 - 4c^2 = 0 \rightarrow 64 - 32c = 0 \rightarrow c = 2$

Hledaná tečna t má rovnici: $y = -x + 2$.

3) Stanovte číslo m tak, aby přímka t : $x + y + m = 0$ byla tečnou kružnice $x^2 + y^2 = 16$.

Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky určíme tak, že řešíme soustavu kvadratické a lineární rovnice metodou dosazovací. Z rovnice přímky vyjádříme proměnnou x a dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme kvadratickou rovnici, kde platí:

- má-li rovnice dvě řešení, je přímka sečna;
- má-li rovnice jedno řešení, je přímka tečna;
- je-li diskriminant menší než 0, rovnice nemá řešení, je přímka vnější přímkou kuželosečky.

$x + y + m = 0 \rightarrow x = -y - m$

dosadíme do rovnice kružnice a určíme koeficienty vzniklé kvadratické rovnice:

$(-y - m)^2 + y^2 = 16 \rightarrow y^2 + 2ym + m^2 + y^2 = 16 \rightarrow 2y^2 + 2ym + m^2 - 16 = 0$

koeficienty: $a = 2$; $b = 2m$; $c = m^2 - 16$

pro diskriminant kvadratické rovnice $D = b^2 - 4ac$ musí platit $D = 0$

$4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 16) = 0 \rightarrow 4m^2 - 8m^2 + 128 = 0 \rightarrow -4m^2 = -128 \rightarrow m^2 = 32$

$m_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $m_2 = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$

Existují dvě tečny k dané kružnici: t_1 : $x + y + 4\sqrt{2} = 0$; t_2 : $x + y - 4\sqrt{2} = 0$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

4) Určete rovnici tečny elipsy o rovnici $x^2 + 8y^2 - 6 = 0$, která je kolmá na přímkou $p: x - y + 2 = 0$.

Přímka p má normálový vektor $\mathbf{n}_p = (1; -1)$; přímka t kolmá na přímkou p má normálový vektor $\mathbf{n}_t = (1; 1) \rightarrow$ musí platit: $\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_t = 0 \rightarrow 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$

tečna t má rovnici: $x + y + c = 0$.

Vzájemnou polohu kuželosečky a přímky určíme tak, že řešíme soustavu kvadratické a lineární rovnice metodou dosazovací. Z rovnice přímky vyjádříme proměnnou x a dosadíme do rovnice kružnice. Dostaneme kvadratickou rovnici, kde platí:

- má-li rovnice dvě řešení, je přímka sečna;
- má-li rovnice jedno řešení, je přímka tečna;
- je-li diskriminant menší než 0, rovnice nemá řešení, je přímka vnější přímkou kuželosečky.

$$x + y + c = 0 \rightarrow x = -y - c$$

dosadíme do rovnice kružnice a určíme koeficienty vzniklé kvadratické rovnice:

$$(-y - c)^2 + 8y^2 - 6 = 0 \rightarrow y^2 + 2yc + c^2 + 8y^2 - 6 = 0 \rightarrow 9y^2 + 2yc + c^2 - 6 = 0$$

koeficienty: $a = 9$; $b = 2c$; $c = c^2 - 6$

pro diskriminant kvadratické rovnice $D = b^2 - 4ac$ musí platit $D = 0$

$$4c^2 - 4 \cdot 9 \cdot (c^2 - 6) = 0 \rightarrow 4c^2 - 36c^2 + 216 = 0 \rightarrow -32c^2 = -216 \rightarrow$$

$$c^2 = \frac{216}{32} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}; c_2 = -\frac{\sqrt{27}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Existují dvě tečny k dané kružnici: $t_1: x + y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$; $t_2: x + y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$.