INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Speciální typy kvadratických rovnic

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Lucie Havrdová

Materiál je dostupný ze školního portálu http://dum.voss-na.cz, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

1. K uvedeným kořenům normovaných kvadratických rovnic přiřaďte jednu z možností A - H:
   a. $-1;\ 4$
   b. $0;\ \ 6$
   c. $-3;\ -3$
   d. $2+\sqrt{5};\ \ 2-\sqrt{5}$

A.	$x^2-6x+9=0$	E.	$x^2+3x-4=0$
B.	$x^2-4x+1=0$	F.	$x^2=6$
C.	$x^2-6x=0$	G.	$2x^2-6x-8=0$
D.	$(x+3)^2=0$	H.	*žádná z možností*

2. Určete součet převrácených hodnot kořenů rovnic:
   a. $x^2-3x-28=0$
   b. $81x^2=25,$
   c. $(-x-1)^2+3(x+3)=\dfrac{x+20}{2}$

3. Je dána rovnice: $x^2+x+p=0$.Určete neznámou $\boldsymbol{p}$ ∈ $\boldsymbol{R}$ a ***druhý kořen*** rovnice, víte-li, že: $x_1=2$.

4. Je dána rovnice: $x^2-qx+10=0$.Určete neznámou $\boldsymbol{q}$ ∈ $\boldsymbol{R}$, tak, aby jeden kořen byl o tři menší než druhý. Uveďte všechny možnosti.

Výsledky:

1. a – G; b – C; c – D; d – H
2. a. $\dfrac{-3}{28}$; b. 0; c. $\dfrac{-2}{9}$
3. $p=-6;\ \ x_2=-3$
4. $q_1=7;\ q_2=-7$

Řešení:

1. K uvedeným kořenům normovaných kvadratických rovnic přiřaďte jednu z možností A - H:

   a. $-1;\ 4$

   b. $0;\ \ 6$

   c. $-3;\ -3$

   d. $2+\sqrt{5};\ \ 2-\sqrt{5}$

A.	$x^2-6x+9=0$	E.	$x^2+3x-4=0$
B.	$x^2-4x+1=0$	F.	$x^2=6$
C.	$x^2-6x=0$	G.	$2x^2-6x-8=0$
D.	$(x+3)^2=0$	H.	*žádná z možností*

Řešení:

a. $a(x-x_1).(x-x_2)=0 \quad a=1$

$(x+1).(x-4)=0$

$x^2+x-4x-4=0$

$x^2-3x-4=0$ ... tento tvar v uvedených možnost není

$2x^2-6x-8=0$ ... po vynásobení číslem 2 se jedná o odpověď G

b. $a(x-x_1).(x-x_2)=0 \quad a=1$

$(x-0).(x-6)=0$

$x^2-6x=0$ ... odpověď C

c. $a(x-x_1).(x-x_2)=0 \quad a=1$

$(x+3).(x+3)=0$

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$ ... odpověď D

d. Pro zadané kořeny získáme: využití např. Vietových vzorců

Pro kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + px + q = 0$, známe-li její kořeny $x_1; x_2$ platí:

$x_1 . x_2 = q$

$x_1 . + x_2 = -p$

$$\left(2+\sqrt{5}\right).\left(2-\sqrt{5}\right) = 4 - 5 = -1 = q$$

$$\left(2+\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{5}\right) = 4 = -p$$

Po dosazení: $x^2 - 4x - 1 = 0$ … žádná z uvedených možností – odpověď H

2. Určete součet převrácených hodnot kořenů rovnic:

a. $x^2 - 3x - 28 = 0$

b. $81x^2 = 25$

c. $(-x-1)^2 + 3(x+3) = \dfrac{x+20}{2}$

Řešení:

a. $x^2 - 3x - 28 = 0$ … rovnice v normovaném tvaru, můžeme využít Vietovy vzorce

Pro kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + px + q = 0$, známe-li její kořeny $x_1; x_2$, platí:

$x_1 . x_2 = q$

$x_1 +_2 = -p$

$x_1 . x_2 = -28$ $\quad$ $x_1 = 7; \quad x_2 = -4$ $\quad$ $x_1 + x_2 = 3$ $\quad$ $\underline{\underline{x_1 = 7}}; \quad \underline{\underline{x_2 = -4}}$

Součet převrácených hodnot: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4-7}{28} = \underline{\underline{\dfrac{-3}{28}}}$

b. $81x^2 = 25$

$81x^2 - 25 = 0$

$(9x-5).(9x+5) = 0$

$(9x-5) = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{5}{9}$ $\qquad$ $(9x+5) = 0 \rightarrow x_2 = -\dfrac{5}{9}$

Součet převrácených hodnot: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{9}{5} - \dfrac{9}{5} = \underline{\underline{0}}$

c. $(-x-1)^2 + 3(x+3) = \dfrac{x+20}{2}$

$x^2 + 2x + 1 + 3x + 9 = \dfrac{x+20}{2} \; / .2$

$2x^2 + 4x + 2 + 6x + 18 = x + 20$

$2x^2 + 9x = 0$

$x.(2x+9) = 0$ $\qquad$ $x_1 = 0$ $\qquad$ $2x_2 + 9 = 0$ $\quad$ $x_2 = \dfrac{-9}{2}$

Součet převrácených hodnot: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 0 - \dfrac{2}{9} = \underline{\underline{\dfrac{-2}{9}}}$

3. Je dána rovnice: $x^2 + x + p = 0$. Určete neznámou $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}$ a ***druhý kořen*** rovnice, víte-li, že: $x_1 = 2$.

Řešení:
Lze řešit Vietovými vzorci nebo dosazením kořenu do rovnice, kde získáme neznámou p, popř. kombinací obou způsobů řešení:

$$x^2 + x + p = 0$$
$$2^2 + 2 + p = 0$$
$$\underline{\underline{p = -6}}$$

Kvadratická rovnice je ve tvaru: $x^2 + x - 6 = 0$

Pro kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + px + q = 0$, známe-li její kořeny $x_1; x_2$, platí: $x_1.x_2 = q$, $x_1 +_2 = -p$

$x_1.x_2 = -6$ $\quad$ $x_1 = 2; \quad x_2 = -3$ $\quad$ $\underline{\underline{x_2 = -3}}$

4. Je dána rovnice: $x^2 - qx + 10 = 0$. Určete neznámou $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}$, tak, aby jeden kořen byl o tři menší než druhý. Uveďte všechny možnosti.

Řešení:
Označení kořenů: $x_1 = a; \; x_2 = a - 3$
Využití Vietových vzorců:

Pro kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + px + q = 0$, známe-li její kořeny $x_1; x_2$, platí: $x_1.x_2 = q$, $x_1 +_2 = -p$

$$x_1.x_2 = 10$$
$$a.(a-3) = 10$$
$$a_2 - 3a - 10 = 0$$

$a_1.a_2 = -10$ $\quad$ $\underline{\underline{a_1 = 5; a_2 = -2}}$, $a_1 + a_2 = 3 = -p$

Nyní dopočítáme kořeny $x_1; x_2$ pro dvě různá a:

$a_1 = 5$	$a_2 = -2$
$x_1 = 5; \; x_2 = 2$	$x_1 = -2; \; x_2 = -5$
$x^2 - qx + 10 = 0$	$x^2 - qx + 10 = 0$
$5^2 - 5q + 10 = 0$	$(-2)^2 - q(-2) + 10 = 0$
$-5q = -35$	$2q = -14$
$\underline{\underline{q_1 = 7}}$	$\underline{\underline{q_2 = -7}}$